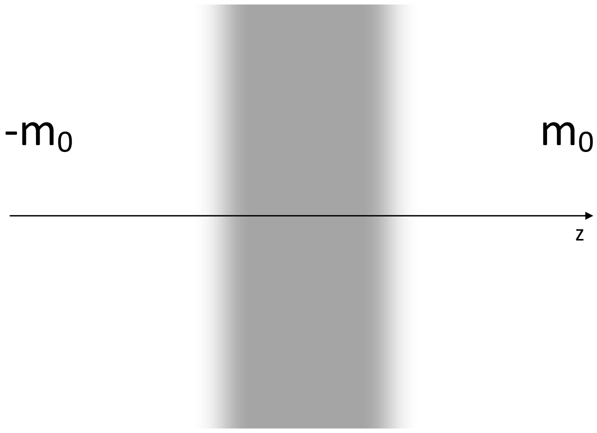
Domača naloga
Ginzburg-Landauova teorija domenske stene

Peter Naglič

15. maj 2012

1 Naloga

Zanima nas obnašanje prehodne plasti (domenske stene) med dvema domenama z nasprotno magnetizacijo v feromagnetu (glej sliko 1).



Slika 1: Skica problema.

2 Rešitev

Pojav razložimo s pomočjo Ginzburg-Landauove teorije, kjer zapišemo prosto energijo v obliki

$$F = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\Big[\frac{\tilde{a}}{2}(\nabla m)^2 + a\, m^2(\mathbf{r}) + b\, m^4(\mathbf{r})\Big], \tag{1}$$

kjer je $\tilde{a} > 0$, $b > 0$ in $a = \gamma(T - T_c)$. Prvi člen nam da pozitiven prispevek, če se magnetizacija spreminja s krajem in tako sili sistem k čim počasnejši spremembi magnetizacije, saj je takrat gradient majhen. Druga dva člena temu nasprotujeta, saj si sistem pod temperaturo faznega prehoda želi imeti magnetizacijo. Z minimizacijo proste energije bomo dobili funkcijo $m(\mathbf{r})$, ki bo kompromis med obema prispevkoma.
Imamo torej variacijski problem

$$F = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, f(m(\mathbf{r}), \nabla m), \tag{2}$$

$$\frac{\delta F}{\delta m} = 0 \quad (\mathrm{min}) \tag{3}$$

in odtod dobimo Euler-Lagrangeovo enačbo

$$\frac{\partial f}{\partial m} - \nabla \frac{\partial f}{\partial(\nabla m)} = 0. \tag{4}$$

Ko vstavimo funkcijo f se minimizacija proste energije prevede na reševanje sledeče diferencialne enačbe

$$-\tilde{a}\,\Delta m(\mathbf{r}) + 2a\,m(\mathbf{r}) + 4b\,m^3(\mathbf{r}) = 0. \tag{5}$$

Za naš primer se bo magnetizacija spreminjala le vzdolž osi z in zato prepišemo diferencialno enačbo v obliko

$$-\tilde{a}\,\frac{\partial^2 m(z)}{\partial z^2} + 2a\,m(z) + 4b\,m^3(z) = 0. \tag{6}$$

Pokažimo še, da se funkcija

$$\frac{\tilde{a}}{2}\left(\frac{\partial m(z)}{\partial z}\right)^2 - a\,m^2(z) - b\,m^4(z) \tag{7}$$

ohranja vzdolž z:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\tilde{a}}{2}\left(\frac{\partial m}{\partial z}\right)^2 - a\,m^2 - b\,m^4\Big) &= \frac{\tilde{a}}{2}\,2\Big(\frac{\partial m}{\partial z}\Big)\Big(\frac{\partial^2 m}{\partial z^2}\Big) - 2a\,m\frac{\partial m}{\partial z} - 4b\,m^3\frac{\partial m}{\partial z} \\ &= \frac{\partial m}{\partial z}\Big(\tilde{a}\,\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} - 2a\,m - 4b\,m^3\Big) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{8}$$

V zadnjem koraku smo upoštevali diferencialno enačbo 6 in dobili res 0. Funkcijo 7 lahko torej enačimo z neko konstanto, ki ni odvisna od z.

$$\frac{\tilde{a}}{2}\left(\frac{\partial m}{\partial z}\right)^2 - a\,m^2 - b\,m^4 = C \tag{9}$$

Za boljšo preglednost uvedemo asimptotsko vrednost magnetizacije $m_0 = \sqrt{-a/2b}$ (daleč stran od domenske stene), korelacijsko dolžino $\xi = \sqrt{-\tilde{a}/2a}$, brezdimenzijsko magnetizacijo $\tilde{m} = m/m_0$ in parameter $\tilde{z} = z/\xi$. Tu smo predpostavili, da je $a < 0$, kar pomeni, da smo pod kritično temperaturo. Tako lahko zgornjo enačbo prevedemo na brezdimenzijsko

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{m}}{\partial \tilde{z}}\right)^2 + \frac{\tilde{m}^2}{2} - \frac{\tilde{m}^4}{4} = C' \tag{10}$$

Konstanto C' lahko določimo iz asimptotskih vrednosti magnetizacije

$$\lim_{\tilde{z}\to\pm\infty}\left(\frac{\partial \tilde{m}}{\partial \tilde{z}}\right) = 0, \tag{11}$$

$$\lim_{\tilde{z}\to\pm\infty}\tilde{m}^2 = 1 \tag{12}$$

in dobimo

$$C' = \frac{1}{4}. \tag{13}$$

Sedaj lahko enačbo 10 malo preoblikujemo

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{m}}{\partial \tilde{z}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\tilde{m}^2}{2}\right)^2, \tag{14}$$

in jo korenimo

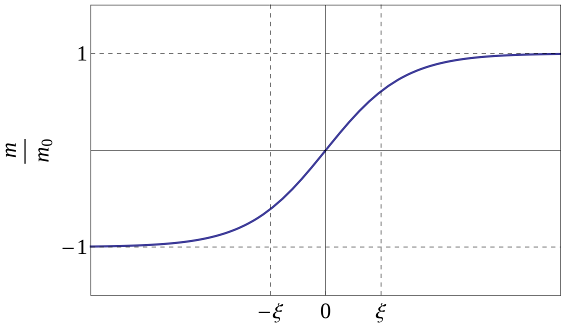
$$\frac{\partial \tilde{m}}{\partial \tilde{z}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \tilde{m}^2). \tag{15}$$

Sedaj pa predpostavimo, da magnetizacija vzdolž osi z narašča in bo torej njen odvod vseskozi pozitiven. Posledično vzamemo le pozitiven predznak. Izraz tako moramo le še integrirati

$$\int_0^{\tilde{m}(z)} \frac{\mathrm{d}\tilde{m}}{1 - \tilde{m}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\tilde{z}_0}^{\tilde{z}} \mathrm{d}\tilde{z}, \tag{16}$$

kjer je $\tilde{z}_0$ mesto na osi z z magnetizacijo 0. Dobimo

$$\mathrm{arctanh}\tilde{m}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{z} - \tilde{z}_0). \tag{17}$$



Slika 2: Odvisnost magnetizacije od koordinate z ($z_0 = 0$).

Končen izraz za magnetizacijo pa je

$$m(z) = m_0 \tanh\left(\frac{z - z_0}{\sqrt{2}\xi}\right). \tag{18}$$

Kot vidimo, nam korelacijska dolžina ξ predstavlja efektivno širino domenske stene. Ko gremo proti kritični temperaturi, začne širina stene divergirati kot

$$\xi = \sqrt{-\frac{\tilde{a}}{\gamma(T - T_c)}}. \tag{19}$$