Feromagnet v približku povprečnega polja

Fizika kondenzirane snovi

Jure Aplinc

4. april 2012

1 Naloga

Obravnavajmo feromagnet v približku povprečnega polja za delce s spinom j. Zanimali nas bosta magnetizacija $\mathcal{M}$ pri $T > 0$ in magnetna susceptibilnost χ nad kritično temperaturo T_c.

2 Heisenbergov model in približek povprečnega polja

Interakcijo v foromagnetu opišemo z Heisenbergovim modelom

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j + g_0 \mu_b \sum_i \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{B}_0. \tag{1}$$

Simbol $\langle ij \rangle$ pove, da obravnavamo povezave med najbližjimi sosedi $i-$ja natanko enkrat (indeks j pa preteke vse te povezave z sosedi). Tega hamiltoniana ne znamo rešiti v splošnem zategadelj napravimo približek povprečnega polja, kjer se znebimo produkta operatorjev spina:

$$\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j = \langle \mathbf{s}_i \rangle \mathbf{s}_j + \mathbf{s}_i \langle \mathbf{s}_j \rangle - \langle \mathbf{s}_i \rangle \langle \mathbf{s}_j \rangle. \tag{2}$$

Produkt $\langle \mathbf{s}_i \rangle \langle \mathbf{s}_j \rangle$ prispeva zgolj k energiji, k magnetizaciji in susceptibilnosti pa ne, zato ga bomo odstranili iz nadaljne obravnave.

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \left(\langle \mathbf{s}_i \rangle \mathbf{s}_j + \mathbf{s}_i \langle \mathbf{s}_j \rangle \right) + g_0 \mu_b \sum_i \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{B}_0 \tag{3}$$

Indeksa i in j lahko v prvem delu hamiltoniana zamenjam, saj sta nema, tako dobim $2 \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{s}_i \langle \mathbf{s}_j \rangle$ Vsoto po $\langle ij \rangle$ razpišemo na dve vsoti, prva teče po i, druga pa po najbližjih sosedih $i-$ja. S tem smo vsako povezavo šteli dvakrat, odtod 1/2. Predpostavimo tudi, da vsi spini v kristalu kažejo v isto smer in zapišemo $\langle \mathbf{s}_j \rangle = \langle \mathbf{s} \rangle$.

$$\mathcal{H} = \sum_i \mathbf{s}_i g_0 \mu_b \left(-\frac{J}{g_0 \mu_b} \sum_{j\, n.s.i} \langle \mathbf{s} \rangle + \mathbf{B}_0 \right) \tag{4}$$

Raje kot z spinom delajmo s magnetizacijo $\mathbf{M} = N/V \langle \vec{\mu} \rangle$; $\vec{\mu} = -g_0 \mu_b \mathbf{s}$ [1] Heisenbergov model se tedaj zapiše takole:

$$\mathcal{H} = \sum_i g_0 \mu_b \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{B}_{ef}; \quad \mathbf{B}_{ef} = \left(\frac{JzV}{g_0^2 \mu_b^2 N} \mathbf{M} + \mathbf{B}_0 \right). \tag{5}$$

Hamiltonian sedaj izgleda podobno hamiltonianu, ki smo ga imeli pri paramagnetizmu, zato lahko magnetizacijo izračunam na enak način kot tam.

$$\mathbf{M} = \frac{N}{V} g_0 \mu_b j B_j (\beta g_0 \mu_b j \|\mathbf{B}_{ef}\|) \frac{\mathbf{B}_{ef}}{\|\mathbf{B}_{ef}\|} \tag{6}$$

[1] $\vec{\mu}$ označuje vektor magnetnega momenta. V tekstu so ostali vektorji sicer označeni odebeljeno.

Z B_j smo označili j – to Brilluinovo funkcijo:

$$B_j(x) = \frac{2j+1}{2j}\coth\left(\frac{2j+1}{2j}x\right) - \frac{1}{2j}\coth\left(\frac{1}{2j}x\right) \approx \frac{(2j+1)^2-1}{12j^2}x - \frac{(2j+1)^4-1}{720j^4}x^3 + \mathcal{O}(x^5) \quad (7)$$

Iz enačbe (6) želimo izračunati magnetizacijo $\mathbf{M}$, kar pa ni analitično mogoče, saj dobimo transcendentno enačbo za M, zato B_j razvijemo za majhne argumente (sedaj je naša rešitev omejena zgolj na majhna polja in magnetizacijo v bližini kritične temperature, ali pa na velike temperature). V razvoju (7) smo uporabili le razvoj coth za majhne argumente

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots \quad (8)$$

Prvi red se nam pokrajša, tako, da moramo razviti najmanj do drugega reda.

3 Spontana magnetizacija

Poglejmo magnetizacijo pri pogoju, da je zunanjo magnetno polje $\mathbf{B}_0 = 0$. Tedaj iz enačb (6) in (7) hitro dobimo

$$M = \alpha\left[\frac{(2j+1)^2-1}{12}\beta\kappa M - \frac{(2j+1)^4-1}{720}\beta^3\kappa^3M^3\right], \quad (9)$$

kjer smo označili $\alpha = g_0\mu_b N/V$ in $\kappa = JzV/(g_0\mu_b N)$. Takoj dobimo trivialno rešitev $M = 0$, bolj pa nas zanimajo netrivialne. Če skiciramo desno in levo stran enačbe (9) na isti graf in grafično iščemo rešitev vidimo, da bomo dobili presečišče obeh strani le tedaj ko bo koeficient pred linearnim členom večji kvečjemu enak 1, kar je naklon leve strani. Če bo naklon manjši bo desna stran vselej pod levo, presečišča in rešitve pa tako ne bo! Naklon desne strani je odvisen od temperature, če je ta naklon tak, da ravno dobimo netrivialno rešitev, to temperaturo imenujemo kritična temperatura.

$$\alpha\frac{(2j+1)^2-1}{12}\beta\kappa = 1 \quad \Rightarrow \quad T_c = \frac{Jz}{k_b}\frac{j(j+1)}{3}. \quad (10)$$

Sedaj se zanimamo le za netrivialno rešitev zato lahko delimo z M in rešimo kvadratno enačbo. Hitro dobimo

$$M = \pm\sqrt{\frac{5}{12}}\frac{N}{V}g_0\mu_b\frac{4j(j+1)}{\sqrt{(2j+1)^2+1}}\sqrt{\frac{T^2(T_c-T)}{t_c^3}}. \quad (11)$$

Ko smo razvijali Brilluinovo funkcijo smo rekli, da morata biti polje in magnetizacija majhna ali pa temperatura zelo visoka. Slednje nas ne zanima, saj tedaj ne dobimonetrivialne rešitve za magnetizacijo. Naša obravnava bo torej omejena na območje okrog kritične temperature $T \approx T_c$, saj bo tam polje majhno. Tako lahko enačbo (11) preoblikujemo

$$M = \pm\sqrt{\frac{5}{12}}\frac{N}{V}g_0\mu_b\frac{4j(j+1)}{\sqrt{(2j+1)^2+1}}\sqrt{\frac{(T_c-T)^2 - T_c(T_c-T) + T_c^2}{T_c^3}(T_c-T)}, \quad (12)$$

kjer bomo zanemarili vse kar ni prvega reda v $(T_c - T)$, saj je razlika majhna. Tako dobimo

$$M = \pm\sqrt{\frac{5}{12}}\frac{N}{V}g_0\mu_b\frac{4j(j+1)}{\sqrt{(2j+1)^2+1}}\sqrt{\frac{T_c-T}{T_c}}. \quad (13)$$

Kot vidimo magnetizacija pada (oziroma narašča, odvisno od rešitve) korensko (v okolici kritične temperature, kjer naša aproksimacija velja) proti 0, ki jo doseže pri temperaturi T_c. Za vse temperature večje od T_c dobimo le trivialno rešitev. Ko smo pod kritično temperaturo je energijsko bolj ugodno, ako se sistem nahaja v eni od netrivialnih rešitev in ne v trivialni $M = 0$.

4 Magnetna susceptibilnost

Vključimo sedaj še zunanje magnetno polje $\mathbf{B}_e f$. V tem primeru bomo magnetizacijo razvili le do prvega reda in dobili:

$$M = \alpha \frac{j(j+1)}{3} \left(\beta \frac{JzV}{g_0 \mu_b N} M + \beta g_0 \mu_b B_0 \right). \tag{14}$$

Odtod izrazimo magnetizacijo, kar je trivialno, hkrati pa enačbo olepšamo tako, da nekaj konstant nadomestimo z T_c. Tedaj dobimo za magnetizacijo

$$M = \frac{N}{V} g_0^2 \mu_b^2 \frac{j(j+1)}{3k_b} \frac{B_0}{T - T_c} \tag{15}$$

Mi želimo imeti magnetno susceptibilnost, ki jo izračunamo iz magnetizacije (15) po formuli, ki jo dobro poznamo

$$\chi = \mu_0 \left. \frac{\partial M}{\partial B_0} \right|_{B_0 \to 0}. \tag{16}$$

Tako, da dobimo

$$\chi = \mu_0 \frac{N}{V} g_0^2 \mu_b^2 \frac{j(j+1)}{3k_b} \frac{1}{T - T_c} = \frac{C}{T - T_c}, \tag{17}$$

kar imenujemo Curie-Weissov zakon. Kot vidimo susceptibilnost divergira pri T_c. Naša rešitev opisuje susceptibilnost za temperature nad kritično temperaturo, saj smo magnetizacijo razvili do 1. reda. Če pa bi jo razvili do drugega reda bi lahko gledali susceptibilnost tudi za temperature nižje od kritične temperature.