Domača naloga

# Londonova enačba za superprevodno plast

Peter Naglič

15. maj 2012

## 1 Naloga

Imamo neskončno superprevodno plast, omejeno v smeri osi $z$ pri $z = \pm d$, v zunanjem magnetnem polju $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_x$. Izračunali bomo magnetno polje in gostoto električnega toka v plasti ter susceptibilnost plasti v limitah tanke in debele plasti.

## 2 Uvod

Pri izpeljavi enačbe Londonov sprva predpostavimo dvotekočinski model, kjer le del prevodnih elektronov prispeva superprevodnem toku. Za te lahko zapišemo gibalno enačbo, ki ne vsebuje disipacije

$$m \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_s}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{e}_0 \mathbf{E}, \tag{1}$$

kjer je $\mathbf{E}$ neko trenutno polje, ki inducira tok. Za superprevodni tok velja

$$\mathbf{j}_s = -n_s \mathrm{e}_0 \mathbf{v}_s. \tag{2}$$

To vstavimo v prvo enačbo in dobimo

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{j}_s}{\mathrm{d}t} = \frac{n_s \mathrm{e}_0^2}{m} \mathbf{E}. \tag{3}$$

Upoštevamo Maxwellovo enačbo $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ v katero vstavimo električno polje iz enačbe 3 ter izpostavimo časovni odvod

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{j}_s + \frac{n_s \mathrm{e}_0^2}{m} \mathbf{B}) = 0. \tag{4}$$

Kot vidimo, je izraz v oklepaju konstanten po času. Zaradi Meissnerjevega efekta je ta izraz celo enak nič, saj morajo notranji tokovi povsem izničiti zunanje polje $\mathbf{B}$. Dobimo

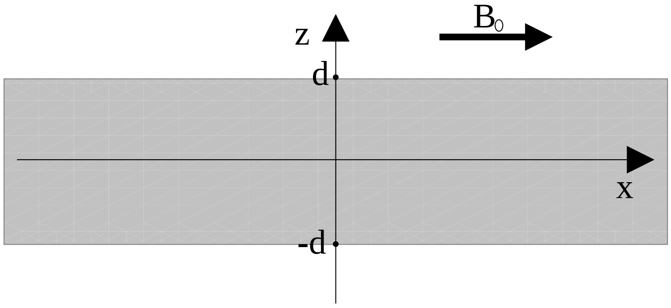
$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{n_s \mathrm{e}_0^2}{m} \mathbf{B}. \tag{5}$$

Z upoštevanjem še ene Maxwellove enačbe $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s$, pa lahko pridemo do enačbe Londonov

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B}, \tag{6}$$

kjer je

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s \mathrm{e}_0^2}}. \tag{7}$$




Slika 1: Skica problema.

## 3 Rešitev naloge

Ker zunanje magnetno polje kaže v smeri osi $x$, lahko enačbo Londonov za polje v plasti zapišemo kot

$$\frac{\partial^2 B_x(z)}{\partial z^2} = \frac{B_x(z)}{\lambda^2}, \tag{8}$$

kjer smo tudi upoštevali, da se spreminja le s koordinato $z$. Splošna rešitev zgornje diferencialne enačbe je

$$B_x(z) = C \sinh\left(\frac{z}{\lambda}\right) + D \cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right). \tag{9}$$

Za določitev konstant pa moramo upoštevati še robne pogoje $B_x(d) = B_x(-d) = B_0$, tako dobimo

$$C = 0 \quad \text{in} \quad D = \frac{B_0}{\cosh(\frac{d}{\lambda})}. \tag{10}$$

Končni izraz za magnetno polje v superprevodni plasti je

$$B_x(z) = B_0 \frac{\cosh(\frac{z}{\lambda})}{\cosh(\frac{d}{\lambda})}. \tag{11}$$

Sedaj nas pa zanima gostota električnega toka v plasti. Pomagali si bomo z Maxwellovo enačbo $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s$. Ko razpišemo rotor, vidimo da je potrebno izračunati le

$$j_{sy} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_x(z)}{\partial z}. \tag{12}$$

Odtod dobimo končen izraz za gostoto električnega toka v superprevodni plasti

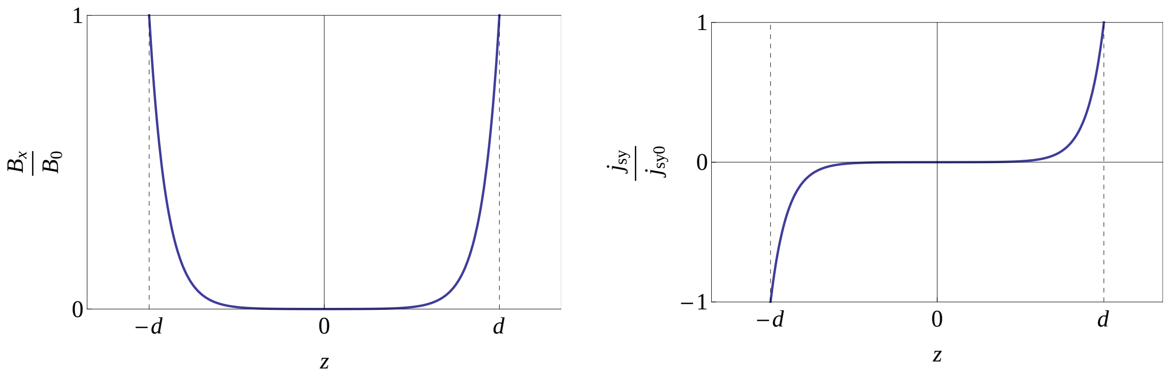
$$j_{sy} = j_{sy0} \frac{\sinh(\frac{z}{\lambda})}{\cosh(\frac{d}{\lambda})}, \tag{13}$$

kjer je $j_{sy0} = B_0/\mu_0\lambda$. Poglejmo še magnetizacijo:

$$M_x(z) = \frac{1}{\mu_0}(B_x(z) - B_0). \tag{14}$$

Za izračun susceptibilnosti bomo potrebovali povprečno magnetizacijo

$$\begin{aligned} \overline{M}_x &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^{d} M_x(z) \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2d\mu_0} \int_{-d}^{d} (B_x(z) - B_0) \mathrm{d}z \\ &= \frac{B_0}{\mu_0} \Big( \frac{\lambda}{d} \tanh\left(\frac{d}{\lambda}\right) - 1 \Big). \end{aligned} \tag{15}$$




Slika 2: Odvisnost magnetnega polja in gostote električnega polja znotraj superprevodne plasti. Debelina je $d = 10\lambda$.

Susceptibilnost pa potem dobimo kot

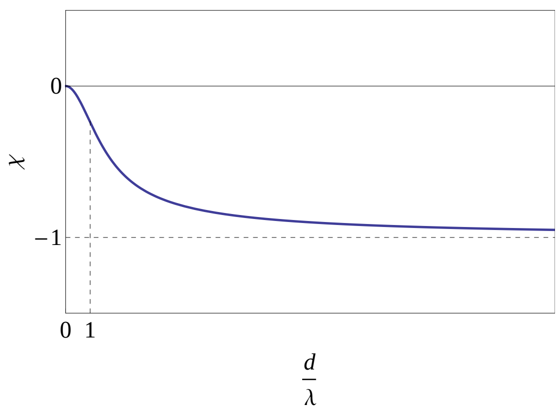
$$\begin{aligned} \chi &= \mu_0 \frac{\overline{M}_x}{B_0} \\ &= \frac{\lambda}{d} \tanh\left(\frac{d}{\lambda}\right) - 1. \end{aligned} \tag{16}$$

Za tanke plasti ($d \ll \lambda$) lahko $\tanh(d/\lambda)$ razvijemo in dobimo

$$\begin{aligned} \chi &\cong \frac{\lambda}{d}\left(\frac{d}{\lambda} - \frac{d^3}{3\lambda^3}\right) - 1 \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2. \end{aligned} \tag{17}$$

Za debele plasti ($d \gg \lambda$) pa vemo, da je $\tanh(d/\lambda \to \infty) \cong 1$ in tako

$$\begin{aligned} \chi &\cong \frac{\lambda}{d} - 1 \\ &\cong -1. \end{aligned} \tag{18}$$




Slika 3: Splošna odvisnost susceptibilnosti od debeline plasti v primerjavi z vdorno globino.