Fizika kondenzirane snovi

Specifična toplota magnonov v feromagnetu

Maruša Vitek

17. 4. 2012

Naloga

Izračunaj specifično toploto magnonov v tridimenzionalnem feromagnetu pri nizki temperaturi ($k_B T \ll J$). Uporabi približno zvezo za disperzijo magnonov $\varepsilon = Ak^2$.

Rešitev

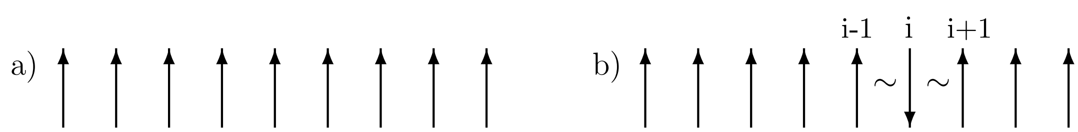
Najprej bomo na kratko preleteli izpeljavo disperzijske relacije za magnone, ki smo jo naredili že na predavanjih. Zapišemo hamiltonian za feromagnet in ga razpišemo z operatorji S^+, S^- in S^z

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \left[{}^1\!/_2 (S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+) + S_i^z S_j^z \right], \tag{1}$$

kjer je $\mathbf{S}_i$ operator spina i-tega delca in J pozitivna konstanta, seštevamo pa po vseh parih najbližjih sosedov i in j. Osnovno stanje feromagneta $|\psi_0\rangle$ je stanje, kjer so vsi spini obrnjeni v isto smer. Pričakujemo, da bo prvo vzbujeno stanje feromagneta tako, kjer bo eden od spinov obrnjen drugače kot ostali. To stanje lahko zapišemo z operatorjem S^-:

$$|\varphi_i\rangle = S_i^- |\psi_0\rangle \tag{2}$$

Ko na to stanje delujemo s hamiltonianom, ugotovimo, da $|\varphi_i\rangle$ ni lastno stanje hamiltoniana.



Slika 1: Na shemi a) je prikazano osnovno stanje feromagneta $|\psi_0\rangle$, na shemi b) pa stanje $|\phi_i\rangle$, kjer je i-ti spin obrnjen drugače kot ostali.

$$H|\varphi_i\rangle = \big(E_0 + \frac{JZ}{2}\big)|\varphi_i\rangle - \frac{J}{2} \sum_{\text{j n.s. i}} |\varphi_j\rangle \tag{3}$$

Za vzbujeno stanje,ki je lastno stanje hamiltoniana, vzamemo nastavek v obliki magnona

$$|\phi_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\text{j}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_j} |\varphi_j\rangle, \tag{4}$$

kjer je N število vseh spinov v sistemu, $\mathbf{R}_j$ pa radij-vektor do j-tega spina. To stanje je linearna kombinacija vseh stanj z enim obrnjenim spinom. Stanje $|\phi_{\mathbf{k}}\rangle$ je lastna funkcija hamiltoniana z lastno energijo $E_0 + \varepsilon_{\mathbf{k}}$, kjer je E_0 lastna energija osnovnega stanja in

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = J \sum_{\text{j n.s. 0}} \sin^2\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_j}{2}\right) \xrightarrow[k_BT \ll J]{} \sim Ak^2. \tag{5}$$

Za nizke temperature lahko sinus razvijemo in dobimo približno kvadratno disperzijo, ki jo bomo uporabili pri izračunu specifične toplote.

Specifično toploto magnonov v feromagnetu bomo izračunali kot odvod energije po temperaturi. Zato najprej izpeljimo izraz za energijo. Pri dovolj majhni gostoti magnonov se ti obnašajo kot bozoni. Njihovo zasedbeno število je zato

$$n_{\mathbf{k}} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}} - 1}, \tag{6}$$

energijo pa izračunamo kot vsoto, ki jo lahko prevedemo na integral:

$$E = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{k}} \to \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} g(\varepsilon)\, \mathrm{d}\varepsilon. \tag{7}$$

Izračunamo gostoto stanj $g(\varepsilon)$ in pri tem upoštevamo, da je diferencial energije $\mathrm{d}\varepsilon = 2Ak\,\mathrm{d}k$ in da je za tridimenzionalni primer $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}k} = 4\pi k^2 \frac{V}{(2\pi)^3}$:

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}k}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{1}{2AVk}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}k} = \frac{k}{4\pi^2 A} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4\pi^2 A^{3/2}}. \tag{8}$$

Ta izraz nesemo v integral in dobimo:

$$E = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi^2 A^{3/2}} \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta\varepsilon} - 1}\, \mathrm{d}\varepsilon = \frac{1}{4\pi^2 A^{3/2}\beta^{5/2}} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1}\, \mathrm{d}x \tag{9}$$

Na tem mestu upoštevamo, da je izraz pod integralom enak $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) = 1.783 = I$ in dobimo končni izraz za energijo

$$E = \frac{I(k_BT)^{5/2}}{4\pi^2 A^{3/2}}. \tag{10}$$

Ta izraz zdaj odvajamo po temperaturi in dobimo prispevek magnonov k specifični toploti feromagneta:

$$c = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{5Ik_B}{8\pi^2}\left(\frac{k_BT}{A}\right)^{3/2}. \tag{11}$$

V primeru tridimenzionalnega feromagneta je specifična toplota sorazmerna s $T^{3/2}$. V dveh dimezijah je gostota stanj konstantna, zato je c sorazmerna s temperaturo. V eni dimenziji pa je gostota stanj sorazmerna z $\varepsilon^{-1/2}$ in je zato specifična toplota sorazmerna s $\sqrt{T}$.