Določanje drugega kritičnega polja (B_{c2}) v superprevodniku tipa II

David Fabijan
28112026

22. maj 2012

1 Naloga

Pri superprevodniku drugega tipa obstajata dve temperaturno odvisni kritični magnetni polji. Pri prvi vrednosti polja, ki je bila izpeljana na predavanjih, dobimo udor magnetnega polja v superprevodno snov. Magnetno polje prebada superprevodnik v obliki niti, ki se z večanjem magnetnega polja gostijo dokler pri kritičnem polju B_{c2} ne pride do popolnega porušenja superprevodnega stanja. Namen te naloge je določitev tega magnetnega polja.

2 Rešitev

Postopek reševanja začnemo z Ginzburg-Landauovo relacijo:

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m^*}\left(-\imath\hbar\nabla - e^*\overrightarrow{A}\right)^2\psi = 0. \tag{1}$$

Vendar pa ker vemo da bo ob kritičnem polju valovna funkcija zelo majhna, si lahko privoščimo poenostavitev v obliki:

$$\alpha\psi + \frac{1}{2m^*}\left(-\imath\hbar\nabla - e^*\overrightarrow{A}\right)^2\psi = 0. \tag{2}$$

Sedaj pa moramo izbrati še primerno polje $\overrightarrow{A}$. Kot dober izbor se izkaže polje v obliki $\overrightarrow{A} = (0, B\mathbf{x}, 0)$, ki nam po aplikaciji rotorja da polje:

$$\overrightarrow{A} = \nabla \times \overrightarrow{A} = (0, 0, B). \tag{3}$$

Ko upoštevamo da je faktor α negativen ter razpišemo kvadratni člen dobimo sledečo enačbo:

$$
\begin{aligned}
|\alpha|\psi &= \frac{1}{2m^*}\left(-\imath\hbar\nabla - e^*\overrightarrow{A}\right)^2\psi = \\
&= \frac{-\hbar^2}{2m^*}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi + \frac{1}{2m^*}\left(-\imath\hbar\frac{\partial}{\partial y} - e^*B\mathbf{x}\right)^2\psi + \frac{-\hbar^2}{2m^*}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Rešitev te parcialne diferencialne enačbe iščemo z nastavkom, ki predstavlja ravni valovanji v dveh smereh ter je prosta funkcija v smeri $\mathbf{x}$. Torej je oblike $\psi = e^{\imath k_z z}e^{\imath k_y y}\varphi(x)$. Ko s tem nastavkom vstopimo v enačbo 4:

$$
\begin{aligned}
|\alpha|\varphi(x) &= \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}\varphi(x) + \frac{1}{2m^*}\left(\hbar k_y - e^*B\mathbf{x}\right)^2\varphi(x) + \frac{-\hbar^2}{2m^*}\varphi''(x) \\
|\alpha|\varphi(x) &= \frac{-\hbar^2 k_z^2}{2m^*}\varphi(x) + \frac{(e^*B)^2}{2m^*}\left(x - \frac{\hbar k_y}{e^*B}\right)^2\varphi(x) + \frac{-\hbar^2}{2m^*}\varphi''(x). \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Če sedaj uvedemo še dve novi oznaki in sicer $\tilde{x} = x - \frac{\hbar k_y}{e^*B}$ in ciklotronsko frekvenco $\omega_c = \frac{e^*B}{m^*}$. Ker je $\tilde{x}$ le premaknjen x lahko zamenjamo vse $\varphi(x)$ z $\varphi(\tilde{x})$ in dobimo:

$$
\frac{\omega_c m^*}{2}\tilde{x}^2\varphi(\tilde{x}) - \frac{\hbar^2}{2m^*}\varphi''(\tilde{x}) = \varphi(\tilde{x})\left(|\alpha| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}\right). \qquad (6)
$$

V tej enačbi pa sedaj že prepoznamo harmonski oscilator, čigar rešitev nam je dobro znana:

$$
\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c = |\alpha| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}. \qquad (7)
$$

Možne vrednosti za n so $0, 1, 2, 3, ...$ nas pa zanima maksimalen možno polje B, ki smo ga skrili v ciklotronsko frekvenco. Če ga želimo poiskati moramo maksimirati ω_c, kar doseženo če postavimo n in k_z na 0. Potem sledi:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\hbar\omega_c &= |\alpha| \\
\frac{1}{2}\hbar\frac{e^*B_{c2}}{m^*} &= |\alpha| \\
B_{c2} &= \frac{2|\alpha|m^*}{\hbar e^*} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Dobljeni razultat pa se navezuje tudi na nalogo "Domenska stena na stiku navadnega in superprevodnega stanja". Material, ki bi imel drugo kritično polje ravno enako prvemu, bi bil namreč natanko tisti pri katerem bi domenska stena postala ugodna. Če torej rečemo:

$$B_c = B_{c2} \tag{9}$$

$$\frac{2|\alpha|m^*}{\hbar e^*} = \sqrt{\mu_0 \frac{\alpha^2}{\beta}}$$

$$\left(\frac{2|\alpha|m^*}{\hbar e^*}\right)^2 = \frac{\mu}{\beta} \tag{10}$$

Ko uporabimo še vrednosti za korelacijsko dolžino $\zeta = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|}}$ in udorno globino $\lambda = \sqrt{\frac{m^*|\beta|}{\mu_0 e^{*2}|\alpha|}}$. Ugotovimo da se enačba 10 poenostavi v $\kappa = \sqrt{2}$, kar je resnično mejna vrednost in tudi dokaj blizu naše grobe ocene iz prej omenjene naloge ($\kappa \approx 1$).