Domača naloga
Kritični tok v cilindrični žici

Peter Naglič

15. maj 2012

1 Naloga

Po cilindrični supreprevodni žici z radijem R teče kritični tok I_c, ki na robu žice ustvarja ravno kritično jakost magnetnega polja H_c. Zanima nas porazdelitev gostote električnega toka in magnetnega polja znotraj žice. Ugotoviti pa želimo tudi zvezo med kritičnim tokom I_c in kritičnim poljem H_c.

2 Rešitev naloge

Pri tej nalogi najprej izpeljemo enačbo Londonov za gostoto električnega toka. Začnemo z enačbo (za izpeljavo glej prejšnjo nalogo)

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{n_s \mathrm{e}_0^2}{m}\mathbf{B}, \tag{1}$$

kjer je m masa elektrona, n_s številska gostota superprevodnih elektronov in e_0 osnovni naboj. Na zgornjo enačbo delujemo z rotorjem, upoštevamo Maxwellovo enačbo $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s$ in tako dobimo enačbo Londonov

$$\nabla^2 \mathbf{j}_s = \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{j}_s, \tag{2}$$

kjer je

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s \mathrm{e}_0^2}}. \tag{3}$$

Zaradi cilindrične geometrije problema vidimo, da je gostota električnega toka odvisna le od radija in je oblike

$$\mathbf{j}_s = j(r)\hat{\mathbf{e}}_z. \tag{4}$$

Enačba 2 se z upoštevanjem cilindričnih koordinat in oblike nastavka poenostavi v

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r\frac{\mathrm{d}j(r)}{\mathrm{d}r}\Big) = \frac{j(r)}{\lambda^2}. \tag{5}$$

To malo preoblikujemo in dobimo

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 j}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x} - x^2 j = 0, \tag{6}$$

kjer je $x = r/\lambda$. Splošna Besselova diferencialna enačba je

$$y^2\frac{\mathrm{d}^2 j}{\mathrm{d}y^2} + y\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}y} + (y^2 - \alpha^2)j = 0, \tag{7}$$

katere rešitve so Besselove $\mathrm{J}_\alpha(y)$ in Neumannove funkcije $\mathrm{Y}_\alpha(y)$. Da dobimo nazaj našo enačbo, moramo vzeti $y = ix$ in $\alpha = 0$. Rešitev diferencialne enačbe 6 je

$$j(r) = C\mathrm{J}_0\Big(i\frac{r}{\lambda}\Big) + D\mathrm{Y}_0\Big(i\frac{r}{\lambda}\Big). \tag{8}$$

Formalno se tem funkcijam z imaginarnim argumentom reče prirejene Besselove funkcije in se jih označi kot:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_\alpha(x) &= i^{-\alpha}\mathrm{J}_\alpha(ix), \\ \mathrm{K}_\alpha(x) &= \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{I}_{-\alpha}(x)-\mathrm{I}_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Določimo sedaj konstanti C in D. Funkcija $\mathrm{Y}_0(ir/\lambda)$ divergira, ko gre $r \to 0$, zato postavimo $D = 0$. Konstanto C pa lahko določimo s celotnim tokom I_c, ki teče po žici. Gostoto električnega toka moramo integrirati po preseku žice

$$\begin{aligned} I_c &= \int_0^R j(r)2\pi r\mathrm{d}r \\ &= 2\pi C\int_0^R \mathrm{J}_0\Big(i\frac{r}{\lambda}\Big)r\mathrm{d}r \\ &= -2\pi C\lambda^2\int_0^{i\frac{R}{\lambda}} \mathrm{J}_0(u)u\mathrm{d}u \\ &= -2\pi C\lambda^2 i\frac{R}{\lambda}\mathrm{J}_1\Big(i\frac{R}{\lambda}\Big) \\ &= 2\pi RC\lambda\mathrm{I}_1\Big(\frac{R}{\lambda}\Big). \end{aligned} \tag{10}$$

Iz tega sledi, da je konstanta C

$$C = \frac{I_c}{2\pi R\lambda\mathrm{I}_1\Big(\frac{R}{\lambda}\Big)}. \tag{11}$$

Tako je končni izraz za gostoto električnega toka

$$\mathbf{j}_s(r) = \frac{I_c}{2\pi R\lambda}\frac{\mathrm{I}_0\Big(\frac{r}{\lambda}\Big)}{\mathrm{I}_1\Big(\frac{R}{\lambda}\Big)}\hat{\mathbf{e}}_z, \tag{12}$$

kjer smo pisali $\mathrm{I}_0(r/\lambda) = \mathrm{J}_0(ir/\lambda)$.

Sedaj lahko s pomočjo enačbe 1 določimo magnetno polje znotraj žice

$$\mathbf{B} = -\frac{m}{n_s\mathrm{e}_0^2}\nabla\times\mathbf{j}_s \tag{13}$$

Ko razpišemo rotor v cilindričnih koordinatah in upoštevamo odvisnost ter smer gostote električnega toka, nam ostane le

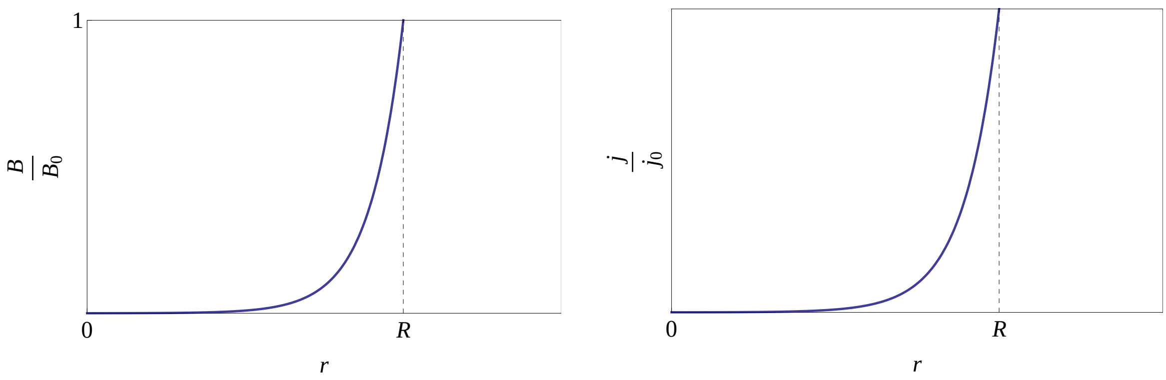
$$\begin{aligned} \mathbf{B}(r) &= \frac{m}{n_s\mathrm{e}_0^2}\frac{\mathrm{d}j(r)}{\mathrm{d}r}\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ &= \frac{m}{n_s\mathrm{e}_0^2}\frac{I_c}{2\pi R\lambda\mathrm{I}_1\Big(\frac{R}{\lambda}\Big)}\frac{\mathrm{d}\mathrm{J}_0\Big(i\frac{r}{\lambda}\Big)}{\mathrm{d}r}\hat{\mathbf{e}}_\varphi. \end{aligned} \tag{14}$$

Odvod lahko izračunamo z upoštevanjem naslednjih identitet za Besselove funkcije

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(x^\alpha\mathrm{J}_\alpha)}{\mathrm{d}x} &= x^\alpha\mathrm{J}_{\alpha-1}, \\ \mathrm{J}_{-\alpha} &= (-1)^\alpha\mathrm{J}_\alpha. \end{aligned} \tag{15}$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathrm{J}_0\Big(i\frac{r}{\lambda}\Big)}{\mathrm{d}r} &= \frac{1}{\lambda}i^{-1}\mathrm{J}_1\Big(i\frac{r}{\lambda}\Big) \\ &= \frac{1}{\lambda}\mathrm{I}_1\Big(\frac{r}{\lambda}\Big). \end{aligned} \tag{16}$$



Slika 1: Odvisnost magnetnega polja in gostote električnega polja znotraj superprevodne cilindrične žice. Polmer je $R = 10\lambda$.

Magnetno polje znotraj žice je

$$\mathbf{B}(r) = \frac{I_c \mu_0}{2\pi R} \frac{\mathrm{I}_1\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{\mathrm{I}_1\left(\frac{R}{\lambda}\right)} \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \tag{17}$$

Na robu žice je magnetno polje ravno enako kritičnemu polju $B(r) = \mu_0 H_c$ in odtod dobimo povezavo med kritičnim tokom in kritičnim poljem

$$I_c = 2\pi R H_c. \tag{18}$$

Do iste povezave bi lahko prišli tudi z Amperovim zakonom

$$I_c = \oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 2\pi R H_c. \tag{19}$$

Če teče po žici kritični tok, magnetno polje na robu superprevodnika doseže ravno kritično vrednost, pri kateri se superprevodnost podre in žica preide v normalno stanje.