Fizika kondenzirane snovi

# Magnoni v antiferomagnetu

Maruša Vitek

17. 4. 2012

## Naloga

Izpelji disperzijsko zvezo za magnone v enodimenzionalnem antiferomagnetu.

## Rešitev

Antiferomagnet obravnavamo v Heisenbergovem modelu, zato hamiltonian zapišemo kot

$$H = J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \tag{1}$$

kjer je $J$ pozitivna konstanta, $\mathbf{S}_i$ pa $i$-ti spin. Obravnavo bomo začeli v Heisenbergovi sliki kvantne mehanike. Časovno odvisnost funkcij v Schrödingerjevi sliki, $|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|\psi(0)\rangle$, tu nadomesti časovna odvisnost operatorjev:

$$\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)e^{i\frac{H}{\hbar}t}|A|\psi(0)e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\rangle \xrightarrow[\text{sliki}]{\text{v Heisenbergovi}} \langle\psi(0)|e^{i\frac{H}{\hbar}t}Ae^{-i\frac{H}{\hbar}t}|\psi(0)\rangle = \langle\psi|A(t)|\psi\rangle. \tag{2}$$

Z odvajanjem operatorja $A(t)$ po času dobimo Von Neumannovo enačbo

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}HA(t) - \frac{i}{\hbar}A(t)H = \frac{i}{\hbar}[H, A(t)] \implies i\hbar\dot{A} = [A(t), H]. \tag{3}$$

Za izbrani $p$-ti spin zapišemo gibalno enačbo:

$$i\hbar\dot{\mathbf{S}}_p = \big[\mathbf{S}_p, J\sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j\big]. \tag{4}$$

Uporabimo zvezo za komutator komponent spina in splošno komutatorsko zvezo.

$$\begin{aligned} \big[S_{i\alpha}, S_{j\beta}\big] &= i\hbar\delta_{ij}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_{i\gamma} \\ [A, BC] &= B[A, C] + [A, B]C \end{aligned} \tag{5}$$

Za koordinato $\alpha$ ($\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$) se enačba (4) prepiše v

$$
\begin{aligned}
i\hbar \dot{S}_{p\alpha} &= J\big[S_{p\alpha}, \sum_{\langle i,j\rangle,\beta} S_{i\beta}\cdot S_{j\beta}\big] = J\sum_{\langle i,j\rangle,\beta}\Big(\big[S_{p\alpha}, S_{i\beta}\big]S_{j\beta} + S_{i\beta}\big[S_{p\alpha}, S_{j\beta}\big]\Big) = \\
&= i\hbar J \sum_{\langle i,j\rangle,\beta,\gamma}\Big(\delta_{pi}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_{p\gamma}S_{j\beta} + S_{i\beta}\delta_{pj}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_{p\gamma}\Big) = \\
&= i\hbar\frac{J}{2}\Big(\sum_{jn.s.p,\beta,\gamma}\delta_{pi}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_{p\gamma}S_{j\beta} + \sum_{jn.s.p,\beta} S_{i\beta}\delta_{pj}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_{p\gamma}\Big)\Big|_{\text{preindeksiramo in seštejemo}} \\
&= i\hbar J\sum_{jn.s.p,\beta,\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_{j\beta}S_{p\gamma} = i\hbar J\sum_{jn.s.p}\big[\mathbf{S}_i\times\mathbf{S}_j\big]_\alpha
\end{aligned}
\tag{6}
$$

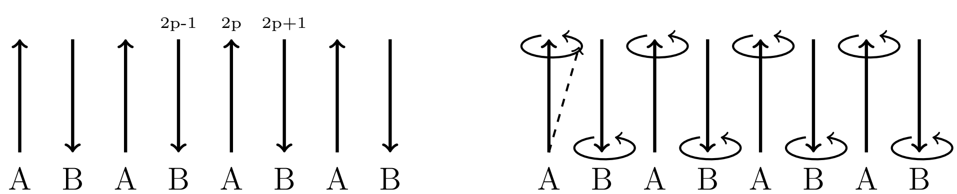
Spine bomo zdaj obravnavali kot vektorje, klasično, ne da bi se preveč obremenjevali z dejstvom, da je spin sicer povsem kvantna količina. Izkaže se, da s tem postopkom dobimo enak rezultat kot s kvantnomehanskim.
Do sedaj nas geometrija problema ni zanimala, zdaj pa si delo poenostavimo in se spomnimo, da imamo opravka z enodimenzionalnim antiferomagnetom. Upoštevamo da sta v vsoti po najbližjih sosedih $p$-tega spina le dva člena in zapišemo poenostavljeno gibalno enačbo:

$$
\dot{\mathbf{S}}_p = J\big(\mathbf{S}_{p-1}\times\mathbf{S}_p + \mathbf{S}_{p+1}\times\mathbf{S}_p\big) \tag{7}
$$

Razpišemo jo po komponentah:

$$
\begin{aligned}
\dot{S}^x_p &= J\big(S^y_{p-1}S^z_p - S^z_{p-1}S^y_p + S^y_{p+1}S^z_p - S^z_{p+1}S^y_p\big)\\
\dot{S}^y_p &= J\big(S^z_{p-1}S^x_p - S^x_{p-1}S^z_p + S^z_{p+1}S^x_p - S^x_{p+1}S^z_p\big)\\
\dot{S}^z_p &= J\big(S^x_{p-1}S^y_p - S^y_{p-1}S^x_p + S^x_{p+1}S^y_p - S^y_{p+1}S^x_p\big)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Magnoni so majhna nihanja spinov okrog ravnovesne lege.




**Slika 1:** Na shemi a) je prikazano ravnovesno (osnovno) stanje antiferomagneta, na shemi b) pa vzbujeno stanje, magnon, kjer spini nihajo okrog ravnovesne lege. Prikazana je tudi razdelitev na podmreži A in B.

Ravnovesna lega spinov je $(0, 0, \pm S^z)$. Upoštevajmo, da so odkloni majhni: $S^x, S^y \ll S$ in $S^z \simeq \pm S$. Produkte $S^xS^y$ lahko zanemarimo enačba za $z$-komponento se poenostavi v $\dot{S}^z_p = 0$. Antiferomagnet zdaj razdelimo na dve podmreži:

A: vsebuje spine s sodimi indeksi ($2p$), ki so obrnjeni navzgor ($S^z = S$).

B: vsebuje spine z lihimi indeksi ($2p+1$), ki so obrnjeni navzdol ($S^z = -S$).

Enačbi za komponenti $x$ in $y$ prepišemo za vsako podmrežo posebej in pri tem za $S^z$ že vstavimo $\pm S$.

$$
\begin{aligned}
\text{A: } \dot{S}^x_{2p} &= JS\big(2S^y_{2p} + S^y_{2p+1} + S^y_{2p-1}\big)\\
\dot{S}^y_{2p} &= -JS\big(2S^x_{2p} + S^x_{2p+1} + S^x_{2p-1}\big)\\
\text{B: } \dot{S}^x_{2p+1} &= -JS\big(2S^y_{2p+1} + S^y_{2p} + S^y_{2p+2}\big)\\
\dot{S}^y_{2p+1} &= JS\big(2S^x_{2p+1} + S^x_{2p} + S^x_{2p+2}\big)
\end{aligned} \tag{9}
$$

Enačbi za posamezno podmrežo seštejemo in uvedemo kompleksno spremenljivko $S^+ = S^x + iS^y$.

$$
\begin{aligned}
\text{A: } i\dot{S}^+_{2p} &= JS\big(2S^+_{2p} + S^+_{2p+1} + S^+_{2p-1}\big)\\
\text{B: } -i\dot{S}^+_{2p+1} &= JS\big(2S^+_{2p+1} + S^+_{2p} + S^+_{2p+2}\big)
\end{aligned} \tag{10}
$$

Sistem bomo rešili z nastavkom za ravne valove:

$$
\begin{aligned}
S^+_{2p} &= Ae^{i(2pka-\omega t)}\\
S^+_{2p+1} &= Be^{i((2p+1)ka-\omega t)}
\end{aligned} \tag{11}
$$

Nastavek vstavimo v enačbi, krajšamo $e^{i(2pka-\omega t)}$ v enačbi za podmrežo A in $e^{i((2p+1)ka-\omega t)}$ v enačbi za podmrežo B in dobimo sistem:

$$
\begin{aligned}
\text{A: } \omega A &= 2JS\big(A + B\cos(ka)\big)\\
\text{B: } \omega B &= -2JS\big(B + A\cos(ka)\big)
\end{aligned} \tag{12}
$$

Definiramo $2JS \equiv \omega_0$. Da je sistem rešljiv, mora biti determinanta enaka 0:

$$
\begin{vmatrix} \omega - \omega_0 & -\omega_0\cos(ka) \\ \omega_0\cos(ka) & \omega + \omega_0 \end{vmatrix} = \omega^2 - \omega_0^2 + \big(\omega_0\cos(ka)\big)^2 = 0 \tag{13}
$$

Od tu sledi izraz za disperzijo v enodimenzionalnem antiferomagnetu:

$$
\omega^2 = \omega_0^2\sin^2(ka) \implies \boxed{\omega = \omega_0|\sin(ka)|} \tag{14}
$$