6. vaja pri predmetu *Kvantna mehanika*:

Kvantni harmonski oscilator

Samo Pucihar, november 2024

Teoretični uvod

Harmonski oscilator je eden najbolj relevantnih sistemov tako v klasični fiziki kot v kvantni mehaniki. V klasični fiziki opisuje številne pojave, kot so nihanje vzmeti, gibanje nihal in valovanje, medtem ko v kvantni mehaniki predstavlja temeljni model za razumevanje kvantiziranih energijskih stanj in osnovnih lastnosti atomov ter molekul. Zaradi svoje matematične elegance in široke uporabnosti je pogosto obravnavan sistem in pozornost mu je bila posvečena tudi pri vajah iz *Kvantne mehanike*.

Začnimo s klasično sliko, kjer je energija delca v harmonskem potencialu podana z

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2,$$

kjer je k konstanta vzmeti. Podoben izraz bo v kvantni mehaniki imel Hamiltonjan, še prej pa lahko k preko zveze $\omega = \sqrt{k/m}$ opustimo:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

S tovrstno obliko Hamiltonjana se je reševalo naloge pri vajah iz Moderne fizike I, kjer so rešitve enačbe oziroma valovne funkcije imele obliko Hermitovega polinoma pomnoženega z enačbo Gaussovega valovnega paketa:

$$\psi_n(x) = C_n H_n\left(\frac{x}{x_0}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$$

Ta rešitev pa je bila pridobljena z nekoliko mučnim reševanjem diferencialne enačbe. Tu bomo predstavili *boljšo* metodo, ki temelji na reševanju problema z operatorji. Uvedemo anihilacijski operator

$$\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} + i\frac{p}{p_0}\right)} \tag{1}$$

in kreacijski operator

$$\boxed{a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} - i\frac{p}{p_0}\right),} \tag{2}$$

pri čemer upoštevamo, da sta x_0 in p_0 konstanti ter velja $x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ in $p_0 = \hbar/x_0$. Ta dva operatorja nista hermitska, $\langle\psi|\,a\,|\psi\rangle = \langle a^\dagger\psi|\psi\rangle \neq \langle\psi|a^\dagger\psi\rangle$, in ne komutirata oz. je njun komutator enak

$$\boxed{[a, a^\dagger] = 1.} \tag{3}$$

Gre za zelo relevantno zvezo, ki nam bo mnogokrat prišla prav pri reševanju poznejših problemov. Ker v splošnem velja $[A, B] = -[B, A]$, je komutator $[a^\dagger, a]$ enak -1.

Z novimi zvezami tudi Hamiltonjan zavzame novo obliko

$$\boxed{H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)} \tag{4}$$

in če z njim delujemo na stanje $|n\rangle$:

$$H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle\,,$$

dobimo za lastno vrednost energijo n-tega stanja, ki jo podaja tudi izraz

$$\boxed{E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),} \tag{5}$$

kjer število n predstavlja stanje delca v harmonskem oscilatorju in velja $n \in \mathbb{N}_0$. Osnovno stanje ima torej vrednost $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Če vrednost števila n povečujemo, opazimo, da so vrednosti energij ekvidistančne

$$\{E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega, E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega, E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega, \dots\},$$

kar niti ni povsem samoumevno – če se spomnimo, ima delec v neskončni potencialni jami energijo $E_n = E_1 n^2$, torej energijske vrednosti niso ekvidistančne.

Če delujemo na stanje $|n\rangle$ z anihilacijskim operatorjem

$$\boxed{a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,,} \tag{6}$$

opazimo, da ta operator stanje zniža za ena. Od tu že samo ime *anihilacijski*. Na podoben način deluje kreacijski operator

$$\boxed{a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,,} \tag{7}$$

le da ta stanje zviša za ena. Omenimo še, da anihilacijski operator lahko deluje na n-to stanje največ n-krat: $a^n |n\rangle = \sqrt{n!}\,|0\rangle$, saj se stanje zniža vse do osnovnega stanja, $n = 0$. Če bi na takšno stanje delovali ponovno, dobimo ničti vektor

$$\boxed{a|0\rangle = 0.} \tag{8}$$

Za konec podajmo še novi obliki operatorja lege

$$\boxed{x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(a + a^\dagger\right)} \tag{9}$$

in operatorja gibalne količine

$$\boxed{p = \frac{p_0}{\sqrt{2}i}\left(a - a^\dagger\right).} \tag{10}$$

Pričakovani vrednosti teh dveh operatorjev sta

$$\boxed{\langle x\rangle = \sqrt{2}x_0\,\mathbb{R}\mathrm{e}\langle a\rangle \quad \text{in} \quad \langle p\rangle = \sqrt{2}p_0\,\mathrm{Im}\langle a\rangle.} \tag{11}$$

Navodila naloge

Delec v harmonskem potencialu se ob $t = 0$ nahaja v stanju

$$|\psi, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle\,.$$

Določi časovni razvoj pričakovane vrednosti lege in gibalne količine ter njuni nedoločenosti v odvisnosti od časa.

$$\{\langle x,t\rangle,\ \langle p,t\rangle,\ \Delta x(t),\ \Delta p(t)\} = ?$$

Določanje $\langle x,t\rangle$ in $\langle p,t\rangle$

Najprej bomo določili časovni razvoj pričakovane vrednosti lege in gibalne količine: $\langle x,t\rangle$, $\langle p,t\rangle$. Ker iščemo *časovni* razvoj, je smiselno začeti z določanjem časovnega razvoja stanja: $|\psi,t\rangle$. To je v našem primeru še posebej nezahtevno, saj imamo lastna stanja že podana. Upoštevamo:

$$|\psi,t\rangle = U(t)\,|\psi,0\rangle = e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\,|\psi,0\rangle$$

Vrednost energije E_n je odvisna od stanja, zato bo lastno stanje $|0\rangle$ imelo energijo $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$, stanje $|1\rangle$ pa energijo $E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$.

$$|\psi,t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\omega t}{2}}\,|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{3\omega t}{2}}\,|1\rangle$$

Nadaljujmo z določanjem $\langle x, t\rangle$ in $\langle p, t\rangle$. Enačbi (11) lahko dodamo časovno komponento:

$$\langle x, t\rangle = \sqrt{2}x_0 \,\mathbb{R}\mathrm{e}\langle a, t\rangle \quad \text{in} \quad \langle p, t\rangle = \sqrt{2}p_0 \,\mathrm{Im}\langle a, t\rangle.$$

Če bi določili $\langle a, t\rangle$, bi z njim lahko določili obe zahtevani pričakovani vrednosti. Torej:

$$\langle a, t\rangle = \langle \psi, t| \, a \, |\psi, t\rangle = \langle \psi, t| \, a \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\omega t}{2}} \, |0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{3\omega t}{2}} \, |1\rangle \right) =$$

Ko z anihilacijskim operatorjem delujemo na prvi člen, postane ta enak nič, saj velja enačba (8). Dobimo torej spodnji izraz.

$$= \langle \psi, t| \, a \left(\sqrt{1} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{3\omega t}{2}} \, |0\rangle \right) =$$

V naslednjem koraku želimo razpisati $\langle \psi, t|$, pri čemer pa je smiselno biti nekoliko bolj pozoren. Poleg tega, da se vsak ket spremeni v bra, $|0\rangle \to \langle 0|$ in $|1\rangle \to \langle 1|$, je potrebno tudi vsako $\mathbb{C}$ število kompleksno konjugirati. Gre za dokaj preprost korak, ki pa naj bi bil na pisnem izpitu med največkrat pozabljenimi.

$$\langle \psi, t| = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+i\frac{\omega t}{2}} \, \langle 0| - \frac{i}{\sqrt{2}} e^{+i\frac{3\omega t}{2}} \, \langle 1|$$

To vstavimo v naš izraz.

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{+i\frac{\omega t}{2}} \, \langle 0| - \frac{i}{\sqrt{2}} e^{+i\frac{3\omega t}{2}} \, \langle 1| \right) \left(\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{3\omega t}{2}} \, |0\rangle \right) =$$

V naslednjem koraku upoštevamo, da delamo z ortonormirano bazo, $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$, zaradi česar je člen, ki vsebuje skalarni produkt $\langle 1|0\rangle$, enak nič.

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i}{\sqrt{2}} e^{+i\frac{3\omega t}{2}} e^{-i\frac{\omega t}{2}} = \frac{1}{2} e^{-i\omega} =$$

Ker za nadaljne računanje potrebujemo realno in imaginarno komponento zgornjega izraza, upoštevamo Eulerjevo zvezo $e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi$, in dobimo

$$\boxed{\langle a, t\rangle = \frac{i}{2} \cos\omega t + \frac{1}{2} \sin\omega t.}$$

Zdaj lahko določimo tudi realno in imaginarno komponento,

$$\mathbb{R}\mathrm{e}\langle a, t\rangle = \frac{1}{2} \sin\omega t \quad \text{in} \quad \mathrm{Im}\langle a, t\rangle = \frac{i}{2} \cos\omega t,$$

ter ju ustrezno vstavimo v enačbo (11). S tem sta $\langle x, t\rangle$ in $\langle p, t\rangle$ dokončno določena.

$$\boxed{\langle x, t\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}} \sin\omega t}$$

$$\boxed{\langle p, t\rangle = \frac{p_0}{\sqrt{2}} \cos\omega t}$$

Side quest #1: Dokazovanje Ehrenfestovega teorema

Ehrenfestov teorem nam lahko pride prav pri reševanju raznih problemov, zato je smiselno, da se z njim na vajah spoznamo. Teorem izvira iz časovnega odvoda pričakovane vrednosti

$$\frac{\mathrm{d}\langle A, t\rangle}{\mathrm{d}t} = i\hbar\langle [A, H], t\rangle,$$

kjer se gleda pričakovano vrednost lege

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\langle x, t\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\langle p, t\rangle}{m}.} \tag{12}$$

Zgornja enačba je nekakšna kvantna analogija na enačbo $v = p/m$ iz klasične mehanike. Za harmonski oscilator pa obstaja še ena oblika Ehrenfestovega teorema:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\langle p, t\rangle}{\mathrm{d}t} = -k\langle x, t\rangle.} \tag{13}$$

Preverili bomo tako enačbo (12) kot (13). Začnimo s prvo. Najbolj smiselno je, da posebej rešimo levo in desno stran enačbe, potem pa jih poskusimo združiti in preveriti, ali sta res enaki.

$$\text{Leva stran: } \frac{\mathrm{d}\langle x, t\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x_0}{\sqrt{2}}\sin\omega t\right) = \frac{x_0\omega}{\sqrt{2}}\cos\omega t = L$$

$$\text{Desna stran: } \frac{\langle p, t\rangle}{m} = \frac{p_0}{m\sqrt{2}}\cos\omega t = D$$

Ali torej velja $L = D$?

$$\frac{x_0\omega}{\sqrt{2}}\cos\omega t \stackrel{?}{=} \frac{p_0}{m\sqrt{2}}\cos\omega t \Big/ : \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\omega t$$

$$x_0\omega \stackrel{?}{=} \frac{p_0}{m}$$

Upoštevamo zvezi $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ in $p_0 = \frac{\hbar}{x_0} = \hbar\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$.

$$\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\omega \stackrel{?}{=} \frac{\hbar}{m}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\sqrt{\frac{\hbar\omega^2}{m\omega}} \stackrel{?}{=} \sqrt{\frac{\hbar^2}{m^2}\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\sqrt{\frac{\hbar\omega}{m}} \stackrel{\checkmark}{=} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{m}}$$

Na podoben način lahko dokažemo tudi enačbo (13).

$$\text{Leva stran: } \frac{\mathrm{d}\langle p, t\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p_0}{\sqrt{2}}\cos\omega t\right) = -\frac{p_0\omega}{\sqrt{2}}\sin\omega t = \tilde{L}$$

$$\text{Desna stran: } -k\langle x, t\rangle = -\frac{kx_0}{\sqrt{2}}\sin\omega t = \tilde{D}$$

$$\tilde{D} \stackrel{?}{=} \tilde{L}$$

$$-\frac{p_0\omega}{\sqrt{2}}\sin\omega t \stackrel{?}{=} -\frac{kx_0}{\sqrt{2}}\sin\omega t$$

$$p_0\omega \stackrel{?}{=} kx_0$$

Poleg zvez za x_0 in p_0 upoštevamo tudi $\omega = \sqrt{k/m}$ oziroma $k = \omega^2 m$.

$$\hbar\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\omega \stackrel{?}{=} \omega^2 m\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\sqrt{\frac{\hbar^2 m\omega\omega^2}{\hbar}} \stackrel{?}{=} \sqrt{\frac{\omega^4 m^2\hbar}{m\omega}}$$

$$\sqrt{\hbar m\omega^3} \stackrel{\checkmark}{=} \sqrt{\hbar m\omega^3}$$

Side quest #2: Izvor lastne frekvence ω

Ponovno si poglejmo izraza za $\langle x, t\rangle$ in $\langle p, t\rangle$, ki smu jo izračunali.

$$\langle x, t\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\sin\omega t \quad \text{in} \quad \langle p, t\rangle = \frac{p_0}{\sqrt{2}}\cos\omega t$$

Obe povprečni vrednosti oscilirata s krožno frekvenco ω. Je to posledica naše arbitrarne izbire stanj ($|0\rangle$ in $|1\rangle$ v našem primeru), ali se ω pojavi ne glede to, katera stanja izberemo?
Krožna frekvenca izvira iz izračuna pričakovane vrednosti anihilacijskega operatorja $\langle a, t\rangle$. Ideja je, da določimo časovno odvisen anihilacijski operator $a(t)$. Takoj, ko imamo opravka s časovnim razvojem operatorja, se je smiselno premakniti v Heisenbergovo sliko. Časovno odvisnost določimo iz izraza, ki smo ga izpeljali na prejšnji vaji

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) = \frac{i}{\hbar}[H, A](t),$$

kjer splošni operator A nadomestimo z a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t) = \frac{i}{\hbar}[H, a](t).$$

Smiselno je poudariti, da velja $a(0) = a$.

Najprej določimo komutator $[H, a]$, pri čemer za H upoštevamo enačbo (4).

$$[H, a] = [\hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right), a] =$$

Skalarji komutirajo, zato lahko $\frac{1}{2}$ opustimo.

$$= [\hbar\omega a^\dagger a, a] = \hbar\omega[a^\dagger a, a] =$$

Upoštevamo $[AB, C] = A[B, C] + [B, C]A$.

$$= \hbar\omega(a^\dagger[a, a] + [a^\dagger, a]a) =$$

Vemo, da velja $[a, a^\dagger] = 1$ in $[a^\dagger, a] = -1$ ter $[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$.

$$= \hbar\omega(-a) = -\hbar\omega a$$

$$\underline{\underline{[H, a] = -\hbar\omega a}}$$

Imamo torej diferencialno enačbo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t) = \frac{i}{\hbar}(-\hbar\omega a)(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t) = -i\omega a(t),$$

katere reševanja se lotimo preko separacije spremenljivk.

$$\frac{1}{a(t)}\mathrm{d}a(t) = -i\omega\mathrm{d}t$$
$$\ln a(t) = -i\omega t$$
$$a(t) = D \cdot e^{-i\omega t}$$

D je konstanta ob času $t = 0$, torej velja $D = a(0) = a$.

$$\boxed{a(t) = a \cdot e^{-i\omega t}}$$

V Heisenbergovi sliki lahko ponovno določimo $\langle a, t\rangle$.

$$\langle a, t\rangle = \langle\psi, 0|\, a(t)\, |\psi, 0\rangle = \langle\psi, 0|\, ae^{-i\omega t}\, |\psi, 0\rangle = e^{-i\omega t}\, \langle\psi, 0|\, a\, |\psi, 0\rangle = e^{-i\omega t}\langle a, 0\rangle$$

$$\boxed{\langle a, t\rangle = e^{-i\omega t}\langle a, 0\rangle}$$

Ta zveza je splošna in bo držala, ne glede na izbiro valovne funkcije. $\langle x, t\rangle$ in $\langle p, t\rangle$ bosta torej vedno nihali z lastno frekvenco linearnega harmonskega oscilatorja. Bodimo bolj konkretni in si to poglejmo na primeru $\langle x, t\rangle$.

$$\langle x, t\rangle = \sqrt{2}x_0\, \mathrm{Re}\langle a, t\rangle = \sqrt{2}x_0\, \mathrm{Re}\, \langle\psi, 0|\, a(t)\, |\psi, 0\rangle = \sqrt{2}x_0\, \mathrm{Re}\{e^{-i\omega t}\, \langle\psi, 0|\, a\, |\psi, 0\rangle\} =$$

$\langle\psi, 0|\, a\, |\psi, 0\rangle$ je pričakovana vrednost operatorja a, ki pa ni hermitski. Označimo jo torej z nekim splošnim $\mathbb{C}$ številom $z = |z|\, e^{i\phi}$.

$$= \sqrt{2}x_0\, \mathbb{R}\mathrm{e}\{e^{-i\omega t}|z|\, e^{i\phi}\} = \sqrt{2}x_0|z|\, \mathbb{R}\mathrm{e}\{e^{-i(\omega t-\phi)}\} = \sqrt{2}x_0|z|\cos\left(\omega t - \phi\right)$$

$$\underline{\underline{\langle x, t\rangle = \sqrt{2}x_0|z|\cos\left(\omega t - \phi\right)}}$$

Edini komponenti, na kateri lahko vpliva kakšno valovno funkcijo si izberemo, sta $|z|$ in ϕ, torej je izvor lastne frekvence popolnoma neodvisen. Pričakovano vrednost lege smo izračunali še enkrat, tokrat v Heisenbergovi sliki, ki je uporabna v primerih, ko želimo ugotoviti, ali je neka komponenta odvisna od izbire valovne funkcije ali ne.

Določanje $\Delta x(t)$ in $\Delta p(t)$

Definicija nedoločenosti lege in gibalne količine pravzaprav obstaja v dveh slikah.

$$\Delta^2 x(t) = \underbrace{\langle x^2(t), 0\rangle - \langle x(t), 0\rangle^2}_{\text{Heisenbergova slika}} = \underbrace{\langle x^2, t\rangle - \langle x, t\rangle^2}_{\text{Schrödingerjeva slika}}$$

$$\Delta^2 p(t) = \underbrace{\langle p^2(t), 0\rangle - \langle p(t), 0\rangle^2}_{\text{Heisenbergova slika}} = \underbrace{\langle p^2, t\rangle - \langle p, t\rangle^2}_{\text{Schrödingerjeva slika}}$$

Tu bomo računali v okviru Schrödingerjeve slike, seveda pa bi lahko vse računali tudi v Heisenbergovi sliki. $\langle x, t\rangle$ in $\langle p, t\rangle$ smo določili že v prejšnjem delu naloge, medtem ko moramo $\langle x^2, t\rangle$ in $\langle p^2, t\rangle$ še izračunati. Začnimo z iskanjem $\langle x^2, t\rangle$.

Začnemo z enačbo (9) in jo ustrezno preoblikujemo.

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(a + a^\dagger\right) \quad\Longrightarrow\quad \langle x\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\langle a + a^\dagger\rangle \quad\Longrightarrow\quad \langle x, t\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\langle a + a^\dagger, t\rangle$$

Skrajno desno enačbo kvadriramo in dobimo

$$\langle x^2, t\rangle = \frac{x_0^2}{2}\langle (a + a^\dagger)^2, t\rangle$$
$$\langle x^2, t\rangle = \frac{x_0^2}{2}\langle aa + aa^\dagger + a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger, t\rangle.$$

Da uredimo člena $aa^\dagger + a^\dagger a$ uporabimo $[a, a^\dagger] = 1 \longrightarrow aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \longrightarrow aa^\dagger = 1 + a^\dagger a$.

$$\langle x^2, t\rangle = \frac{x_0^2}{2}\langle a^2 + a^{\dagger 2} + 2a^\dagger a + 1, t\rangle$$

Upoštevamo zvezo $z + z^* = 2\,\mathbb{R}\mathrm{e}(z)$, saj v izrazu nastopa $a^2 + a^{\dagger 2} = a^2 + a^{2\dagger}$ in rečemo, da velja $a^2 = z$.

$$\langle x^2, t\rangle = \frac{x_0^2}{2}(2\,\mathbb{R}\mathrm{e}\langle a^2, t\rangle + 2\langle a^\dagger a, t\rangle + 1)$$

Dobimo torej izraz $\langle x^2, t\rangle = x_0^2(\,\mathbb{R}\mathrm{e}\langle a^2, t\rangle + \langle a^\dagger a, t\rangle + \frac{1}{2})$. Še preden pa določimo $\mathbb{R}\mathrm{e}\langle a^2, t\rangle$ in $\langle a^\dagger a, t\rangle$, je smiselno še prej izračunati izraz za $\langle p^2, t\rangle$, saj so koraki zelo podobni.

$$\langle p^2, t\rangle = -\frac{p_0^2}{2}\langle (a - a^\dagger)^2, t\rangle$$
$$\langle p^2, t\rangle = -\frac{p_0^2}{2}\langle a^2 + a^{\dagger 2} - aa^\dagger - a^\dagger a, t\rangle$$
$$\langle p^2, t\rangle = -\frac{p_0^2}{2}\langle a^2 + a^{\dagger 2} - (aa^\dagger + a^\dagger a), t\rangle$$
$$\langle p^2, t\rangle = -\frac{p_0^2}{2}(2\,\mathbb{R}\mathrm{e}\langle a^2, t\rangle - 2\langle a^\dagger a, t\rangle - 1)$$
$$\langle p^2, t\rangle = -p_0^2\left(\mathbb{R}\mathrm{e}\langle a^2, t\rangle - \langle a^\dagger a, t\rangle - \frac{1}{2}\right)$$

Če želimo določiti $\langle x^2, t\rangle$ in $\langle p^2, t\rangle$, moramo še poiskati vrednosti členov $\mathbb{R}\mathrm{e}\langle a^2, t\rangle$ in $\langle a^\dagger a, t\rangle$. Pričnimo z $\langle a^2, t\rangle$, kjer lahko najprej z operatorjem a^2 delujemo na valovno funkcijo

$$a^2 \left|\psi, t\right\rangle = aa\left|\psi, t\right\rangle = a\left(a\left|\psi, t\right\rangle\right) = a\left([\dots]a\left|0\right\rangle + [\dots]a\left|1\right\rangle\right) = a(0 + [\dots]\left|0\right\rangle) = [\dots]a\left|0\right\rangle = 0,$$

in ugotovimo, da delovanje s takim operatorjem vrne ničti vektor. Z oznako $[\dots]$ sem označil vse predfaktorje, ki bi bistvo kvečjem zamegljevali.

Določimo še

$$a^\dagger a\left|\psi, t\right\rangle = a^\dagger a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\omega t}{2}}\left|0\right\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{3\hbar\omega}{t}}\left|1\right\rangle\right) = a^\dagger\left(0 + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{3\hbar\omega}{t}}\sqrt{1}\left|0\right\rangle\right) = \underline{\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{3\hbar\omega}{t}}\left|1\right\rangle},$$

ki ga uporabimo pri izračunu

$$\left\langle \psi, t\right| a^\dagger a\left|\psi, t\right\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{+i\frac{\omega t}{2}}\left\langle 0\right| - \frac{i}{\sqrt{2}}e^{+i\frac{3\hbar\omega}{t}}\left\langle 1\right|\right)\left(\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{3\hbar\omega}{t}}\left|1\right\rangle\right) = -\frac{i^2}{2}e^{i\frac{3\omega t}{2}}e^{-i\frac{3\omega t}{2}}\left\langle 1|1\right\rangle = \frac{1}{2}.$$

Tako. Izračunali smo vse potrebne komponente za izračun $\Delta x(t)$ in $\Delta p(t)$. Na vajah smo nalogo zaključili kar na tej točki, saj je končni izračun dokaj preprost in smo lahko razpoložljiv čas usmerili v reševanje drugih nalog. Vseeno pa se mi zdi za konec smiselno, da $\Delta x(t)$ in $\Delta p(t)$ določimo še eksplicitno.

$$\Delta x(t) = \sqrt{\langle x^2, t\rangle - \langle x, t\rangle^2} = \sqrt{(x_0^2(\mathbb{R}\mathrm{e}\langle a^2, t\rangle + \langle a^\dagger a, t\rangle + \frac{1}{2}) - \frac{x_0^2}{2}\sin^2\omega t} =$$
$$= \sqrt{x_0^2(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - \frac{x_0^2}{2}\sin^2\omega t} = \boxed{x_0\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\omega t}}$$

$$\Delta p(t) = \sqrt{\langle p^2, t\rangle - \langle p, t\rangle^2} = \sqrt{(-p_0^2(\mathbb{R}\mathrm{e}\langle a^2, t\rangle - \langle a^\dagger a, t\rangle - \frac{1}{2}) - \frac{p_0^2}{2}\cos^2\omega t} =$$
$$= \sqrt{p_0^2(-0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - \frac{p_0^2}{2}\cos^2\omega t} = \boxed{p_0\sqrt{1 - \frac{1}{2}\cos^2\omega t}}$$

Opomba avtorja

Dokument je osnovan na zapiskih iz vaj pri predmetu Kvantna mehanika v zimskem semestru 2024, ki jih vodi Tomaž Rejec. Postopku reševanja pa sem sam dodal nekaj razlage. Upam, da vam je pri sledenju naloge bila v pomoč. Vseeno se mi zdi smiselno izpostaviti, da sem diplomiran biokemik, ki je v procesu učenja zakonitosti kvantne mehanike, tako da prosim za razumevanje, če se v razlagi ali računih znajde kakšna napaka. Če jo opazite, bi bil zelo vesel, če bi me nanjo opomnili (mail: samo.pucihar@gmail.com). Poleg tega se mi je zdelo zanimivo pisati na temni podlagi, ki je še posebej prijetna pri branju iz zaslona. Če pa si kdo želi dokument natisniti, lahko naredim še verzijo z belim ozadjem.

– Samo Pucihar