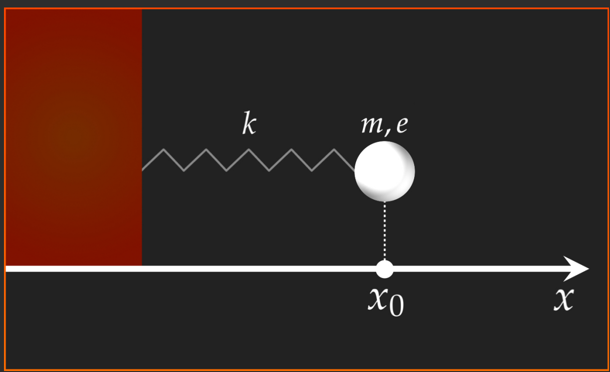
7. vaja pri predmetu *Kvantna mehanika*: **Koherentna stanja harmonskega oscilatorja**

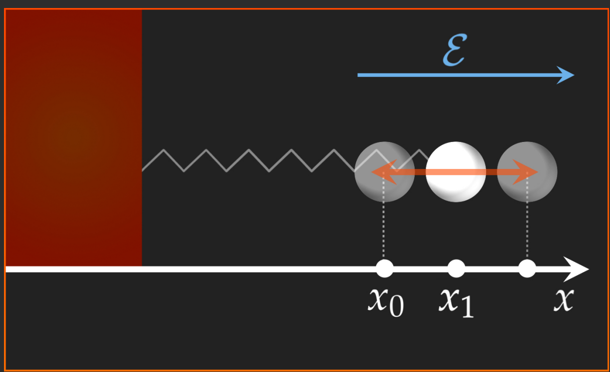
Samo Pucihar, november 2024

Uvod

Začnimo z obravnavo harmonskega oscilatorja kakršnega poznamo iz klasične mehanike. Lahko si ga predstavljamo kot horizontalno vzmetno nihalo, ki ga sestavlja vzmet s konstanto k, na katero je pritrjena kroglica z maso m in nabojem e. Nihalo je ob $t < 0$ v mirovni legi x_0.



Ob času $t = 0$ pa vklopimo homogeno električno polje $\mathcal{E}$, katerega smer je vzporedna osi x in kaže v desno. Nabita kroglica bo zato začela nihati okoli nove mirovne lege x_1. Amplituda nihanja bo prav tako enaka x_1.



Poskusimo ugotoviti, kako se bo kroglica gibala za $t > 0$. Na njo delujeta sila vzmeti in sila električnega polja. Newtonov zakon gibanja se zato lahko zapiše kot

$$m\ddot{x} = -kx + e\mathcal{E},$$

kjer pred členom za silo vzmeti pripišemo negativni predznak, saj ta sila pri pozitivnih vrednostih x deluje v levo smer, medtem ko sila električnega polja deluje v desno. Skupaj z začetnima pogojema $x(t=0) = x_0 = 0$ in $\dot{x}(t=0) = 0$ lahko rešimo zgornjo diferencialno enačbo ter dobimo enačbo gibanja

$$\boxed{x(t) = x_1(1 - \cos\omega t),} \tag{1}$$

kjer velja $x_1 = e\mathcal{E}/k$ in $\omega = \sqrt{k/m}$. Takšna je torej rešitev v okviru **klasične mehanike**.

Navodila naloge

Obravnavaj **kvantni** harmonski oscilator, ki se ob časih $t > 0$ nahaja v električnem polju $\mathcal{E}$. Določi $|\psi, 0\rangle$ in $|\psi, t\rangle$ ter pričakovano vrednost lege in gibalne količine, kot tudi njuni nedoločenosti.

Kvantnomehanski pristop

Problem harmonskega oscilatorja v električnem polju smo v uvodu rešili z zakoni klasične mehanike, naloga pa od nas zahteva, da popolnoma enak problem rešimo v okviru kvantne mehanike. V sistemu ob časih $t < 0$ električno polje ni prisotno, zato bo Hamiltonjan vsota kinetične in prožnostne energije. Zavzemal bo torej obliko, ki smo jo spoznali že pri *6. Vaji*:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

Ob časih $t > 0$ pa dobimo dodatni potencial električnega polja. Ta potencial je linearna funkcija lege. Njegov člen preprosto dodamo začetnemu Hamiltonjanu. Novi Hamiltonjah označimo s $\widetilde{H}$.

$$\boxed{\widetilde{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 - e\mathcal{E}x}$$

Zaradi nadaljnega računanja je smiselno novi Hamiltonjan nekoliko preurediti. Prvi člen ostane nespremenjen, medtem ko druga dva člena poskusimo pretvoriti v obliko popolnega kvadrata, pri čemer moramo odšteti *odvečni* člen $\frac{k}{2}\left(\frac{e\mathcal{E}}{k}\right)^2$.

$$\widetilde{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}\left(x - \frac{e\mathcal{E}}{k}\right)^2 - \frac{k}{2}\left(\frac{e\mathcal{E}}{k}\right)^2$$

V členu $\frac{e\mathcal{E}}{k}$ prepoznamo novo mirovno lego x_1, saj velja $x_1 = \frac{e\mathcal{E}}{k}$.

$$\widetilde{H} = \frac{p^2}{2m} + \underbrace{\frac{k}{2}(x - x_1)^2 - \frac{k}{2}x_1^2}_{\widetilde{V}(x)}$$

Graf funkcij $V(x)$ in $\widetilde{V}(x)$

Skicirajmo si funkciji potenciala V ob $t < 0$ in potenciala $\widetilde{V}$ ob $t > 0$.

Poskusimo ugotoviti, kakšno je stanje delca pred vklopom električnega polja. Če se vrnemo na obliko Hamiltonjana ob $t < 0$, $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$, bi si lahko klasično predstavljali, da delec *miruje* v legi x_0. To pa bi pomenilo, da sta hkrati ostro določeni tako lega kot hitrost delca, kar pa v kvantni sliki ni mogoče. Stanje, ki pa bi se taki predstavi najbolj približalo, bi bilo osnovno stanje

$$|\psi, 0\rangle = |0\rangle\,,$$

ki ima energijo

$$H\,|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega\,|0\rangle$$

Ob času $t = 0$ smo torej določili stanje in energijo delca. Zanima pa nas časovni razvoj: $|\psi, t\rangle$.

Vpeljava $\widetilde{x}$

Definirajmo nekoliko spremenjen koordinatni sistem tako, da bomo z $\widetilde{x}$ merili odmike od nove mirovne lege x_1.

$$\widetilde{x} = x - x_1 = x - \frac{e\mathcal{E}}{k}$$

Poglejmo, kako definicija $\widetilde{x}$ vpliva na operatorje. Novi operator lege[1] je torej enak

$$\widetilde{x} = x - x_1.$$

Odvod po $\widetilde{x}$ pa je enak odvodu po x, zato operator gibalne količine ostaja nespremenjen.

$$\widetilde{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} = p$$

[1]Zgornji izraz je enak spodnjemu, saj po dogovoru strešic nad operatorji ne pišemo eksplicitno.

Tudi $\widetilde{H}$ lahko zdaj zapišemo z novimi operatorji.

$$\boxed{\widetilde{H} = \frac{\widetilde{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\widetilde{x}^2 - \frac{1}{2}kx_1^2}$$

Novi anihilacijski operator

Tako kot pri prejšnji vaji bomo tudi tukaj naredili prehod formalizma na anihilacijski in kreacijski operator. Najprej se spomnimo, kako zgleda anihilacijski operator.

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} + i\frac{p}{p_0}\right),$$

kjer sta x_0 in p_0 konstantni količini[2] in velja $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ ter $p_0 = \frac{\hbar}{x_0}$. Na podoben način lahko zapišemo novi anihilacijski operator $\widetilde{a}$, le da operatorja x in p zamenjamo z $\widetilde{x}$ in $\widetilde{p}$.

$$\boxed{\widetilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\widetilde{x}}{x_0} + i\frac{\widetilde{p}}{p_0}\right)} \tag{2}$$

Vprašajmo se, kakšna je zveza med a in $\widetilde{a}$. Konec koncev se razlikujeta le v vsebovanih operatorjih. Za operatorja gibalne količine velja: $p = \widetilde{p}$, medtem ko operatorja lege nista povsem enaka: $\widetilde{x} = x - x_1$. Razlikujeta se za konstanto. Posledično se tudi a in $\widetilde{a}$ razlikujeta za konstanto.

$$\boxed{a = \widetilde{a} + \frac{x_1}{\sqrt{2}x_0}} \tag{3}$$

Delovanje anihilacijskega operatorja

Spomnimo se, da imamo ob $t = 0$ delec v začetnem stanju $|\psi, 0\rangle$. Če nanj delujemo z a,

$$a\,|\psi, 0\rangle = 0,$$

dobimo ničti vektor. Zdaj pa upoštevamo zvezo (3) in dobimo

$$\left(\widetilde{a} + \frac{x_1}{\sqrt{2}x_0}\right)|\psi, 0\rangle = 0,$$

oziroma, če izraz preuredimo,

$$\boxed{\widetilde{a}\,|\psi, 0\rangle = -\frac{x_1}{\sqrt{2}x_0}\,|\psi, 0\rangle\,,} \tag{4}$$

ugotovimo, da je začetno stanje tudi lastno stanje novega anihilacijskega operatorja.

[2] Pri tem predpostavljamo, da velja $\omega = \widetilde{\omega}$.

Koherentna stanja

Lastna stanja anihilacijskega operatorja igrajo zelo pomembno vlogo v fiziki harmonskega oscilatorja, kot tudi v fiziki delcev – opisujejo namreč stanja bozonov. So resnično fundamentalnega pomena, zato imajo posebno ime – **koherentna stanja**. Poglejmo si jih nekoliko podrobneje.

Koherentna stanja so značilna za vsak harmonski oscilator. Naučili se bomo nekaj dokaj splošnega, kar presega našo konkretno nalogo, zato je smiselno na tem mestu zapis z vijugo začasno opustiti. Stanje $|\psi\rangle$ je koherentno, če velja

$$a\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle\,,$$

torej je lastno stanje anihilacijskega operatorja. Njegovo delovanje na $|\psi\rangle$ stanja ne spremeni.

Ta operator ni hermitski, $a \neq a^\dagger$. Če se spomnite, smo na predavanjih dokazali, da imajo realne lastne vrednosti le hermitski operatorji. V primeru anihilacijskega operatorja torej ni razloga, da lastne vrednost ne bi mogle biti kompleksne. To zapišemo z nekoliko novim formalizmom.

$$\boxed{a\,|z\rangle = z\,|z\rangle\,; \quad z \in \mathbb{C}} \tag{5}$$

Časovni razvoj koherentnega stanja

Vprašajmo se, kakšen je časovni razvoj $|z, t\rangle$. Ena od možnih poti, kako se tega problema lotiti, je razvoj stanja $|z\rangle$ po lastnih stanjih harmonskega oscilatorja,

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle\,,$$

pri čemer vsako lastno stanje množimo z časovno odvisnim faznim faktorjem. Zgornji izraz lahko zato upoštevamo v enačbi (5) in dobimo

$$a \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle = z \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle\,,$$

pri čemer lahko zdaj upoštevamo delovanje anihilacijskega operatorja, saj velja splošna zveza $a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$, in izraz se spremeni v

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n}\,|n-1\rangle = z \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle\,.$$

Bodimo pozorni na dejstvo, da se vsota zdaj prične pri $n = 1$ in ne $n = 0$, saj se je stanje $|0\rangle$ po delovanju anihilacijskega operatorja *uničilo*. Ker vseeno želimo, da se vsota prične z $n = 0$, lahko preimenujemo indeks na levi strani enačbe: $n - 1 \Rrightarrow n$, in dobimo izraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \sqrt{n+1}\,|n\rangle = z \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle\,.$$

Lastna stanja z različnim n-jem so med seboj linearno neodvisna. Posledično mora veljati enakost med koeficienti v levi in desni vsoti.

$$c_{n+1}\sqrt{n+1} = zc_n$$

Če enačbo preuredimo, odkrijemo rekurzijsko zvezo med koeficienti,

$$c_{n+1} = c_n \frac{z}{\sqrt{n+1}}.$$

Če poznamo c_0, je c_1 enak

$$c_1 = zc_0,$$

c_2 enak

$$c_2 = \frac{z^2}{\sqrt{2}}c_0$$

in c_3 enak

$$c_3 = \frac{z^3}{\sqrt{2}\sqrt{3}}c_0.$$

Postopek lahko posplošimo na

$$\boxed{c_n = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}c_0,}$$

s čimer lahko ponovno zapišemo stanje $|z\rangle$.

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} c_0 |n\rangle$$

Na tem mestu se pojavi vprašanje, kolikšna pa je vrednost c_0. Odgovor dobimo z normalizacijo, torej upoštevamo $\langle z|z\rangle = 1$.

$$\langle z|z\rangle = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z^*)^m}{\sqrt{m!}} c_0^* \langle m|\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} c_0 |n\rangle\right) = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{n!}$$

V zadnjem izrazu prepoznamo Taylorjevo vrsto, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

$$|c_0|^2 e^{|z|^2} \equiv 1,$$

Določimo lahko tudi c_0, pri čemer vzamemo zgolj pozitivne vrednosti, saj konec koncev predznak koeficienta nima vpliva na *realnost* nekega stanja.

$$\boxed{c_0 = e^{-|z|^2/2}}$$

Dokončno smo določili stanje $|z\rangle$.

$$\boxed{|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|z|^2/2} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle\,,} \tag{6}$$

ki mu pa še vedno nismo določili časovnega razvoja.

Vse skupaj množimo s časovno odvisnim faznim faktorjem $e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$, pri čemer upoštevamo $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$.

$$|z,t\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|z|^2/2}\frac{|z|^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\, e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}$$

$$|z,t\rangle = e^{-|z|^2/2}e^{-i\frac{\omega}{2}t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}e^{-i\omega nt}\,|n\rangle$$

$$|z,t\rangle = e^{-|z|^2/2}e^{-i\frac{\omega}{2}t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(ze^{-i\omega t}\right)^n|n\rangle$$

Če zdaj zgornji izraz pozorno primerjamo z enačbo (6), opazimo določeno mero podobnosti. V zgornjem izrazu je sicer dodan konstantni člen (t.j. $e^{-i\frac{\omega}{2}t}$), sicer pa sta si enačbi zelo podobni, še posebej, če z iz enačbe (6) nadomestimo z $ze^{-i\omega t}$! Pri tem je nekoliko problematičen člen $e^{-|z|^2/2}$, v katerem pa si zamenjavo $|z|$-ja z $|ze^{i\omega t}|$ lahko privoščimo, saj velja

$$|ze^{-i\omega t}| = |z||e^{-i\omega t}| = |z|\cdot 1.$$

Upoštevamo torej $|z| \Rrightarrow |ze^{i\omega t}|$ in dobimo

$$|z,t\rangle = e^{-i\frac{\omega}{2}t}\underbrace{\exp\left[\frac{-|ze^{i\omega t}|^2}{2}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(ze^{-i\omega t}\right)^n|n\rangle}_{|ze^{-i\omega t}\rangle}.$$

$$\boxed{|z,t\rangle = e^{-i\frac{\omega}{2}t}\left|ze^{-i\omega t}\right\rangle} \tag{7}$$

Stanje $|z,t\rangle$ je torej koherentno stanje z lastno vrednostjo $ze^{-i\omega t}$. Če je harmonski oscilator ob $t=0$ v koherentnem stanju, bo v koherentnem stanju tudi ob kasnejših časih.

Nova definicija $\langle x\rangle$ in $\langle p\rangle$

Pri prejšnji vaji smo uvedli izraza za pričakovani vrednosti lege in gibalne količine,

$$\langle x\rangle = \sqrt{2}x_0\,\mathbb{R}\mathrm{e}\langle a\rangle \quad \text{in} \quad \langle p\rangle = \sqrt{2}p_0\,\mathrm{Im}\langle a\rangle,$$

ter izpeljali izraz za pričakovani vrednosti njunih kvadratov,

$$\langle x^2,t\rangle = x_0^2\left(\mathbb{R}\mathrm{e}\langle a^2,t\rangle + \langle a^\dagger a,t\rangle + \frac{1}{2}\right) \quad \text{in} \quad \langle p^2,t\rangle = p_0^2\left(-\mathbb{R}\mathrm{e}\langle a^2,t\rangle + \langle a^\dagger a,t\rangle + \frac{1}{2}\right).$$

V formalizmu koherentnih stanj dobijo ti štirje izrazi nekoliko spremenjeno obliko. Začnimo z iskanjem naslednje uporabne zveze – pričakovane vrednosti anihilacijskega in kreacijskega operatorja v normalnem vrstnem redu[3], pri čemer sta operatorja potencirana na poljubno potenco.

[3]**Normalni vrstni red** (ang. *normal ordering*) je definiran tako, da so vsi anihilacijski operatorji na desni, vsi kreacijski operatorji pa na levi strani.

$$\langle (a^\dagger)^N a^M \rangle = \langle z| \, (a^\dagger)^N a^M \, |z\rangle = \left\langle a^N z \middle| a^M z \right\rangle = \left\langle z^N z \middle| z^M z \right\rangle = (z^*)^N z^M \, \langle z|z\rangle = (z^*)^N z^M$$

$$\boxed{\langle (a^\dagger)^N a^M \rangle = (z^*)^N z^M} \tag{8}$$

S to zvezo ponovno definiramo pričakovano vrednost lege,

$$\boxed{\langle x \rangle = \sqrt{2} x_0 \, \mathbb{R}\mathrm{e}(z),} \tag{9}$$

in pričakovano vrednost gibalne količine,

$$\boxed{\langle p \rangle = \sqrt{2} p_0 \, \mathrm{Im}(z).} \tag{10}$$

Nova definicija $\langle x^2 \rangle$ in $\langle p^2 \rangle$

Prav tako lahko izpeljemo izraz za pričakovano vrednost kvadrata lege. Pri prvem koraku nam pomaga splošna zveza $\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha) = \frac{\alpha + \alpha^*}{2}$.

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= x_0^2 \left(\mathbb{R}\mathrm{e}(z^2) + z^* z + \frac{1}{2} \right) \\
\langle x^2 \rangle &= x_0^2 \left(\frac{z^2 + (z^*)^2}{2} + |z|^2 + \frac{1}{2} \right) \\
\langle x^2 \rangle &= x_0^2 \left(\frac{1}{2} (z + z^*)^2 + \frac{1}{2} \right) \\
\langle x^2 \rangle &= x_0^2 \left(\frac{1}{2} (2\mathbb{R}\mathrm{e}(z))^2 + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle x^2 \rangle = x_0^2 \left(2(\mathbb{R}\mathrm{e}(z))^2 + \frac{1}{2} \right)} \tag{11}$$

Z zelo podobnim postopkom dobimo tudi izraz za pričakovano vrednost kvadrata gibalne količine.

$$\boxed{\langle p^2 \rangle = p_0^2 \left(2(\mathrm{Im}(z))^2 + \frac{1}{2} \right)} \tag{12}$$

Nova definicija Δx in Δp

Z izpeljanimi izrazi lahko zdaj redefiniramo tudi nedoločenost obeh količin. Začnemo z definicijo kvadrata nedoločenosti , v katero vstavimo novi zvezi za $\langle x \rangle$ in $\langle x^2 \rangle$ oz. $\langle p \rangle$ in $\langle p^2 \rangle$.

$$\Delta^2 x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = x_0^2 \left(2(\mathbb{R}\mathrm{e}(z))^2 + \frac{1}{2} \right) - \left(\sqrt{2} x_0 \, \mathbb{R}\mathrm{e}(z) \right)^2 = \frac{x_0^2}{2}$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}} \tag{13}$$

$$\Delta^2 p = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = p_0^2 \left(2(\mathrm{Im}(z))^2 + \frac{1}{2} \right) - \left(\sqrt{2} p_0 \, \mathrm{Im}(z) \right)^2 = \frac{p_0^2}{2}$$

$$\boxed{\Delta p = \frac{p_0}{\sqrt{2}}} \tag{14}$$

Produkt nedoločenosti Δx in Δp

... je enak

$$\Delta x \Delta p = \frac{x_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{p_0}{\sqrt{2}} = \frac{x_0 p_0}{2}.$$

Z upoštevanjem zveze $p_0 = \hbar / x_0$ se izraz poenostavi v

$$\boxed{\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}.} \tag{15}$$

Koherentna stanja so torej stanja z minimalnim produktom nedoločenosti. Njihova valovna funkcija bo torej imela obliko Gaussovega valovnega paketa. Splošna oblika takšnih funkcij[4] je

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4\sigma^2}} e^{i \frac{\langle p \rangle}{\hbar} x}.$$

Koherentno stanje lahko s pomočjo zgornje splošne enačbe Gaussovega valovnega paketa zapišemo kot

$$\boxed{\psi_z(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi x_0^2}} e^{-\frac{(x - \sqrt{2} x_0 \mathbf{Re}(z))^2}{2x_0^2}} e^{\frac{i\sqrt{2} p_0 \mathrm{Im}(z)}{\hbar} x}.} \tag{16}$$

V zgornjem izrazu zavzame parameter σ fiksno vrednost, t.j. $\frac{x_0}{\sqrt{2}}$, zaradi česar ni več prost parameter, saj je x_0 kvečjemu lastnost harmonskega oscilatorja. To pomeni, da je širina valovnega paketa točno določena.

Vemo torej, da je koherentno stanje Gaussov valovni paket in da časovni razvoj koherentnega stanja ostaja koherentno stanje. Če imamo torej valovno funkcijo v harmonskem oscilatorju v obliki Gaussovega valovnega paketa, bo ta funkcija tudi ostala Gaussov valovni paket ob kasnejših časih. Kar pa se s časom razvija, je vrednost z in posledično $\langle x, t \rangle$ in $\langle p, t \rangle$.

[4] Glej 4. vajo.

Vrnitev k začetnemu problemu

Za nami je dolga pot, na kateri smo se opremili z ustreznim znanjem za reševanje problemov koherentnih stanj. Tudi stanje delca v harmonskem oscilatorju ob prisotnosti električnega polje je koherentno stanje. Čas je, da se vrnemo k *dejanski* nalogi, ki zdaj postane dosti bolj preprosta.

Ponovno si oglejmo enačbo (4).

$$\widetilde{a}\,|\psi,0\rangle = -\frac{x_1}{\sqrt{2}x_0}\,|\psi,0\rangle$$

Če jo zdaj primerjamo z enačbo (5) ugotovimo, da je v našem konkretnem primeru z enak $-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x_1}{x_0}$. Ob $t = 0$ je delec v stanju

$$\boxed{|\psi,0\rangle = |z\rangle\,; \quad z = -\frac{x_1}{\sqrt{2}x_0},} \tag{17}$$

medtem ko je časovni razvoj delca enak

$$\boxed{|\psi,t\rangle = e^{-i\frac{\omega}{2}t}\left|-\frac{x_1}{\sqrt{2}x_0}e^{-i\omega t}\right\rangle.} \tag{18}$$

Velja torej, da je $z(t) = -\frac{x_1}{\sqrt{2}x_0}e^{-i\omega t}$. Izračunamo lahko, kako se pričakovana vrednost lege spreminja s časom.

$$\langle\widetilde{x},t\rangle = \sqrt{2}x_0\mathbb{R}\mathrm{e}(z(t)) = \sqrt{2}x_0\mathbb{R}\mathrm{e}\left(-\frac{x_1}{\sqrt{2}x_0}e^{-i\omega t}\right) = \sqrt{2}x_0\left(-\frac{x_1}{\sqrt{2}x_0}\cos\omega t\right) = -x_1\cos\omega t$$

Če zdaj še upoštevamo zvezo $\widetilde{x} = x - x_1$, kjer sta $\widetilde{x}_1$ in x operatorja, je $\langle x,t\rangle$ enak

$$\boxed{\langle x,t\rangle = x_1(1-\cos\omega t),} \tag{19}$$

kar je enak rezultat, kot izraz ki smo ga dobili v uvodnem delu s pomočjo klasične mehanike.

Grafična predstava

Na bolj grafičen si lahko predstavljamo, kako se ob $t = 0$ Gaussov paket nahaja v $x = 0$, oz. je osnovno stanje starega harmonskega oscilatorja. Tedaj velja $z(0) = -\frac{x_1}{\sqrt{2}x_0} \in \mathbb{R}$, kar pomeni, da delec še nima gibalne količine – glej enačbo (16).
Ob poznejših časih postane z kompleksen: $z(t) = -\frac{x_1}{\sqrt{2}x_0}e^{-i\omega t} \in \mathbb{C}$. Gaussov valovni paket bo torej bil sestavljen tako iz realnega kot iz imaginarnega dela in posledično imel gibalno količino.

Opomba avtorja

Dokument je osnovan na zapiskih iz vaj pri predmetu Kvantna mehanika v zimskem semestru 2024, ki jih vodi Tomaž Rejec. Postopku reševanja pa sem sam dodal nekaj razlage. Upam, da vam je pri sledenju naloge bila v pomoč. Vseeno se mi zdi smiselno izpostaviti, da sem diplomiran biokemik, ki je v procesu učenja zakonitosti kvantne mehanike, tako da prosim za razumevanje, če se v razlagi ali računih znajde kakšna napaka. Če jo opazite, bi bil zelo vesel, če bi me nanjo opomnili, pa naj gre za preprosto tipkarsko napako ali resno zmoto v postopku reševanja (mail: samo.pucihar@gmail.com). Poleg tega se mi je zdelo zanimivo pisati na temni podlagi, ki je še posebej prijetna pri branju iz zaslona. Če pa si kdo želi dokument natisniti, lahko naredim še verzijo z belim ozadjem.

– Samo Pucihar