

1. KOLOKVIJ IZ KVANTNE MEHANIKE I

19. november 2010

1. Delec se giblje v enodimenzionalnem potencialu

$$V(x) = -\lambda\delta(x) + \lambda'\delta(x - x_0).$$

Predpostavi, da je $\lambda > 0$.

- (a) Poišči energijo in valovno funkcijo vezanega stanja za $\lambda' = 0$.
- (b) Določi x_0 tako, da bo verjetnost, da delec najdemo v območju $|x| < x_0$ enaka $\frac{1}{2}$.
- (c) Zapiši nastavek za valovno funkcijo vezanega stanja za $\lambda' > 0$.
- (d) Zapiši robne pogoje, ki jim mora zadoščati ta valovna funkcija.
- (e) Izpelji transcendentno enačbo, ki določa energijo vezanega stanja.
- (f) Največ kolikšen je pri vrednosti x_0 iz točke (b) lahko λ' , da še dobimo vezano stanje?

2. Delec v harmonskem potencialu

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

se z verjetnostjo $\frac{1}{2}$ nahaja v osnovnem stanju $|0\rangle$, z verjetnostjo $\frac{1}{2}$ pa v linearni kombinaciji osnovnega in prvega vzbujenega stanja $|D\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|1\rangle$. Z meritvijo bi radi s čimvečjo natančnostjo ugotovili, v katerem od obeh stanj se delec nahaja.

- (a) Opravimo meritev, po kateri se delec nahaja v enem od stanj $|0\rangle$ ali $|1\rangle$. S kakšno verjetnostjo bi nastopili posamezni rezultati meritve, če bi bil delec pred meritvijo v stanju $|0\rangle$? Kaj pa, če bi bil pred meritvijo v stanju $|D\rangle$? Pri kolikšnem odstotku meritev lahko ugotovimo, v katerem od stanj $|0\rangle$ ali $|D\rangle$ je bil delec pred meritvijo?
- (b) Delež uspešnih meritev lahko povečamo tako, da meritev izvedemo v večjem Hilbertovem prostoru, npr. v podprostoru z bazo $|0\rangle$, $|1\rangle$ in $|2\rangle$, kjer je $|2\rangle$ valovna funkcija drugega vzbujenega stanja sistema.

i. Določi stanje $|\gamma\rangle$ tako, da bodo stanja $|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|L\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|2\rangle$, $|\beta\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|2\rangle$ in $|\gamma\rangle$, kjer je $|L\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}|1\rangle$, tvorila ortonormirano bazo tega podprostora.

ii. Opravimo meritev, po kateri se delec nahaja v enem od stanj $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ ali $|\gamma\rangle$. S kakšno verjetnostjo bi nastopili posamezni rezultati meritve, če bi bil delec pred meritvijo v stanju $|0\rangle$? Kaj pa, če bi bil pred meritvijo v stanju $|D\rangle$? Pri kolikšnem odstotku meritev lahko zdaj ugotovimo, v katerem od stanj $|0\rangle$ ali $|D\rangle$ je bil delec pred meritvijo?

iii. Določi λ in μ tako, da bomo pri meritvi, po kateri se delec nahaja v enem od stanj $|\alpha'\rangle \propto |L\rangle + \lambda|2\rangle$, $|\beta'\rangle \propto |1\rangle + \mu|2\rangle$ ali $|\gamma'\rangle$, v največjem odstotku meritev lahko ugotovili, v katerem od stanj $|0\rangle$ ali $|D\rangle$ je bil delec pred meritvijo.