

2. KOLOKVIJ IZ KVANTNE MEHANIKE I

24. januar 2011

1. Obravnavaj problem dveh delcev: prvi delec s spinom $1/2$ miruje,

$$H_1 = \gamma S_z,$$

drugi delec brez spina pa se giblje v harmonskem potencialu,

$$H_2 = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right).$$

Hamiltonian nesklapljenega sistema obeh delcev je

$$H_0 = H_1 + H_2.$$

Predpostavi, da je $\gamma > 0$.

- (a) Poišči lastne energije in lastne funkcije Hamiltoniana H_1 .
 - (b) Poišči lastne energije in lastne funkcije Hamiltoniana H_2 .
 - (c) Zapiši lastne energije in lastne funkcije sistema obeh delcev. Kolikšen naj bo γ , da bo prvo vzbujeno stanje sistema dvakrat degenerirano?
2. Obravnavaj problem, ko sta delca sklopljena,

$$H = H_0 + \lambda (S_+ a + S_- a^\dagger),$$

kjer sta operatorja $S_\pm = S_x \pm iS_y$ določena s komponentama x in y spina prvega delca. Ob času $t = 0$ je sistem delcev v stanju $|\uparrow 0\rangle$, torej je komponenta z spina prvega delca enaka $\frac{\hbar}{2}$, drugi delec pa je v osnovnem stanju harmonskega potenciala. Predpostavi, da je $\omega = \gamma$.

- (a) Izračunaj časovni razvoj valovne funkcije sistema. Namig: Za lastne funkcije uporabi nastavek $|\psi\rangle = \alpha |\uparrow 0\rangle + \beta |\downarrow 1\rangle$.
 - (b) Kolikšna je verjetnost, da pri meritvi komponente z spina prvega delca ob $t > 0$ dobimo rezultat $-\frac{\hbar}{2}$?
 - (c) Kolikšna je verjetnost, da pri meritvi komponente x spina prvega delca ob $t > 0$ dobimo rezultat $-\frac{\hbar}{2}$?
 - (d) Poišči odgovor na vprašanje iz točke (b) v okviru prvega reda časovno odvisne perturbacije? Kot perturbacijo obravnavaj sklopitveni člen $\lambda (S_+ a + S_- a^\dagger)$. Za katere čase je tak približek upravičen?
3. Obravnavaj problem, ko je delec s spinom $1/2$ sklopljen z N delci v harmonskih oscilatorjih s frekvencami $\omega_n = \frac{n}{N}\omega_0$,

$$H = \gamma S_z + \sum_{n=1,2,\dots,N} \left[\hbar\omega_n \left(a_n^\dagger a_n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (S_+ a_n + S_- a_n^\dagger) \right].$$

Ob času $t = 0$ je sistem delcev v stanju $|\uparrow 0, 0, \dots, 0\rangle$, torej je komponenta z spina prvega delca enaka $\frac{\hbar}{2}$, vso ostali delci pa so v osnovnem stanju svojega harmonskega potenciala. Kolikšna je verjetnost, da pri meritvi komponente z spina prvega delca ob $t > 0$ dobimo rezultat $-\frac{\hbar}{2}$? Računaj v prvem redu časovno odvisne perturbacije v limiti $N \rightarrow \infty$. Predpostavi, da je $\omega_0 \gg \gamma \gg \frac{1}{t}$.