NALOGA IZ FIZIKE TRDNE SNOVI

Mihály 2.13: Dušena mrežna nihanja

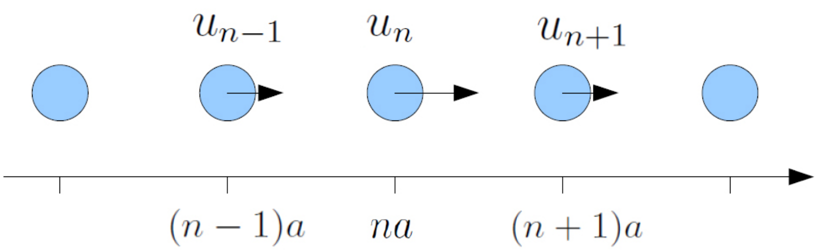
Denis Brojan

22. junij, 2011

Postavitev problema

V linearni enodimenzionalni verigi atomov, ki so na medsebojni razdalji a, so posamezni atomi sklopljeni s svojimi prvimi sosedi z enakimi vzmetmi s prožnostnim koeficientom K. Posamezen atom poleg sil vzmeti čuti še silo dušenja, ki jo modeliramo z linearnim zakonom: če je odmik n-tega atoma iz ravnovesne lege u_n, bo sila dušenja zanj imela obliko $-\gamma \dot{u_n}$, kjer je $\dot{u_n}$ hitrost n-tega atoma.
Kako dušenje vpliva na disperzijo $\omega = \omega(k)$ in kakšen je relaksacijski čas dušenja lastnih nihanj? Predpostavi, da je $\gamma^2 \ll k/m$ in posebej diskutiraj rešitve pri $K \approx \pi/a$ in $k \approx 0$.

Rešitev



Slika 1: Veriga atomov. Mrežna razdalja a, masa posameznega atoma m in koeficient vzmeti K. Označeni navidezni premiki sosednjih atomov pri premiku atoma na mestu na.

Opraviti imamo z enodimenzionalno mrežo z enim atomom v vsaki primitivni celici, ki jo določa enodimenzionalni vektor $R_n = na$, kjer $n = 0, 1, 2 \ldots$. Opremljeni z izkušnjami iz reševanja problemov mrežnih nihanj, lahko na dušek zapišemo gibalno enačbo za n-ti atom v verigi. Nanj deluje sila sosednjih vzmeti, $-K(u_n - u_{n+1}) - K(u_n - u_{n-1})$, in zaviralna sila $-\gamma \dot{u}_n$. Predpostavljamo, da je koeficient γ enak za vse atome. Gibalna enačba se tako glasi:

$$-K(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) - \gamma \dot{u}_n = m\ddot{u}_n$$

Vse člene spravimo na desno stran enačbe in enačbo delimo z maso m.

$$\ddot{u}_n + \frac{\gamma}{m}\dot{u}_n + \frac{K}{m}(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) = 0$$

Ako se spominjamo problema dušenega nihala iz ljudske šole ali pa gibanja tekočinskega longitudinalnega vala v viskozni tekočini (kamor limitira naš problem v kontinuumski limiti), potem vemo, da bomo za lepšo prezentacijo rešitev na koncu potrebovali parametra:

$$\tau = \frac{m}{2\gamma}, \qquad \omega_0^2 = \frac{4K}{m}.$$

Z njima se enačba elegantno glasi:

$$\ddot{u}_n + \frac{2}{\tau}\dot{u}_n + \frac{1}{4}\omega_0^2\,(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) = 0 \tag{1}$$

Rešitev te enačbe iščemo z običajnim nastavkom

$$u_n = \varepsilon\, e^{-i\omega t}\, e^{ikna},$$

kjer je ε neznana amplituda nihanja, ω frekvenca nihanja in k ustrezen valovni vektor, ki ga izbiramo v skladu s periodičnim robnim pogojem, to je $u_N = u_1$. Velja opozoriti, da frekvence ω ne moremo smatrati povsem kot frekvenco nihanja, saj v enačbi (1) nastopa prvi časovni odvod $\dot{u}_n$, ki bo v enačbo za $\omega(k)$ vnesel imaginarno enoto. Zategadelj bo ω kompleksno število. Če to bralca moti, lahko namesto tega nastavka vzame raje

$$u_n = \varepsilon\, e^{-i\tilde{\omega} t} e^{\alpha t}\, e^{ikna},$$

v katerem bo $\tilde{\omega}$ dejanska frekvenca lastnega nihanja, koeficient α pa bo predstavljal atenuacijo nihanja in bo zvezan s konstanto τ, kar bomo v nadaljevanju pokazali.

Izbrani nastavek apliciramo na diferenčno enačbo.

$$-\omega^2 - i\omega\frac{2}{\tau} + \frac{1}{4}\omega_0^2\left(2 - (e^{ika} + e^{-ika})\right) = 0$$

$$\omega^2 + i\omega\frac{2}{\tau} - \omega_0^2\sin^2\frac{ka}{2} = 0$$

Rešitvi kvadratne enačbe sta

$$\omega^{\pm} = -i\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{-\frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2\sin^2\frac{ka}{2}}$$

Tukaj nimamo popolnoma ločenih realnih in imaginarnih komponent te frekvence, saj se lahko zgodi, da je pod korenom še vedno negativno število. Rezultat se hitro poenostavi v znane izraze za nihanja nedušene verige, ko $\tau \to \infty$; tedaj je $\omega = \omega_0\,|\sin ka/2|$. Če predpostavimo, da je masa m vnaprej določena, in da je

$$\omega_0^2 \gg \frac{1}{\tau^2}, \tag{2}$$

oziroma, če sledimo napotkom Mihályja [1]

$$\gamma^2 \ll K\,m,$$

[1]Bralec naj bo zelo pozoren na enote. Kot je običajno za Mihályjevo zbirko, je postavka $\gamma^2 \ll K/m$ v njej zmotna.

potem lahko napravimo dve enostavni limiti.

Ko je k dovolj velik na intervalu $[0, \pi/a]$, da je pod korenom pozitivno število, bo koeficient $1/\tau$ imel vlogo relaksacijskega časa dušenega nihanja, frekvenca tega dušenega nihanja pa bo:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{-\frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2}}.$$

Rešitev ima, kot smo že namignili, pregledno obliko:

$$u_n = \varepsilon e^{-i\tilde{\omega}t}\, e^{-t/\tau}\, e^{ikna}.$$

Vzemimo limito, ko je $k = \pi/a$. Tedaj bo $\sin ka/2 = 1$. V limiti (2) bo frekvenca nihanja v primerjavi s tisto v navadni nedušeni verigi zmanjšana, in sicer na:

$$\tilde{\omega} = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2\omega_0^2 \tau^2}\right)$$

V limiti, ko je $k = 0$, pa bo kompleksna frekvenca enaka

$$\omega^{\pm} = -\frac{i}{\tau} \pm \frac{i}{\tau}.$$

Kar je bodisi $\omega = 0$ bodisi $\omega = -i\frac{2}{\tau}$. Rešitvi razumemo. V obeh primerih ne gre za časovno oscilirajoča nihanja. V prvem gre za nekakšno zamrznjeno verigo, ki ima statično porazdelitev amplitud e^{ikna}, druga rešitev pa ima ob $t = 0$ enako porazdelitev kot prva, a s časom eksponentno zamira z relaksacijskim časom $2/\tau$. Zadnjo bi lahko imenovali nadkritično dušenje. Prva pa fizikalno ni smiselna, saj ni mogoče v nedogled vzdrževati odmika od ravnovesne lege z vzmetmi povezanih atomov, ne da bi nanje delovali z dodatnimi zunanjimi silami.