Anizotropni Heisenbergov model

Jure Varlec

László Mihály, naloga 5.10
Obravnavaj enodimenzionalen sistem s Hamiltonko

$$\hat{H} = -\sum_i \left[J' \hat{S}_i^z \hat{S}_{i+1}^z + \frac{1}{2} J \left(\hat{S}_i^+ \hat{S}_{i+1}^- + \hat{S}_i^- \hat{S}_{i+1}^+ \right) \right]$$

in feromagnetno sklopitvijo. Pokaži:

- da so za $J' > J$ magnonske valovne funcije podobne tistim za izotropni model, a imajo neničelno energijo pri $k = 0$;
- da za $J' < J$ feromagnetna ureditev *ni* osnovno stanje sistema.

Osnovno stanje feromagneta je takšno, da so vsi spini poravnani v isti smeri. Za sistem spinov z maksimalno z-komponento S se tako stanje zapiše

$$|0\rangle = \prod_i |S\rangle_i \,, \quad \hat{H}\,|0\rangle = NS^2 J'\,|0\rangle = E_0\,|0\rangle \,,$$

kjer je N število spinov v sistemu. Prvo vzbujeno stanje takega sistema ima enega od spinov obrnjenega v nasprotno smer, kar prikažemo z operatorjem $\hat{S}_j^-$. Takšno stanje ni lastno stanje Heisenbergove hamiltonke. Namesto tega sestavimo magnon z valovnim številom k kot

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2SN}} \sum_j e^{ikaj} \hat{S}_j^- \,|0\rangle \,, \tag{1}$$

kjer je a razdalja med spini. Za operatorje $\hat{S}_i^\pm$ veljata relaciji

$$\hat{S}_i^- \,|S\rangle_i = \sqrt{2S}\,|S-1\rangle_i \quad \text{in} \quad \hat{S}_i^+ \hat{S}_i^- \,|S\rangle_i = 2S\,|S\rangle_i \,,$$

operatorji za različne spine pa med sabo seveda komutirajo.

Zdaj se lahko lotimo izračuna energije magnona. Najprej zapišimo hamiltonko kot vsoto $\hat{H} = -\sum_i \hat{H}_i$. Operator $\hat{H}_i$ bo v vsoti (1) sklapljal dva člena, ostali pa so lastne funkcije. Ali drugače:

$$\begin{aligned} \hat{H}_l \hat{S}_{j\neq l,l+1}^- \,|0\rangle &= S^2 J' \hat{S}_j^- \,|0\rangle \,, \\ \hat{H}_l \hat{S}_l^- \,|0\rangle &= J'S(S-1)\hat{S}_l^- \,|0\rangle + JS\hat{S}_{l+1}^- \,|0\rangle \,, \\ \hat{H}_l \hat{S}_{l+1}^- \,|0\rangle &= J'S(S-1)\hat{S}_{l+1}^- \,|0\rangle + JS\hat{S}_l^- \,|0\rangle \,. \end{aligned}$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} \hat{H}_l\,|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2SN}} \Bigg[&\sum_{j\neq l,l+1} e^{ikaj} J'S^2 \hat{S}_j^- \,|0\rangle + \\ &+ e^{ikal} \left(J'S(S-1)\hat{S}_l^- + JS\hat{S}_{l+1}^- \right) |0\rangle + \\ &+ e^{ika(l+1)} \left(J'S(S-1)\hat{S}_{l+1}^- + JS\hat{S}_l^- \right) |0\rangle \Bigg]. \end{aligned}$$

Vidimo pa, da lahko iz drugih dveh členov vzamemo člena oblike $\exp(ikal) J'S^2 \hat{S}_l^- \,|0\rangle$ in ju vstavimo nazaj v vsoto po j, s čimer teče ta vsota spet po vseh j. Ko nadalje preuredimo preostale člene tako, da izpostavimo $\hat{S}_l^-$ in $\hat{S}_{l+1}^-$, dobimo nekoliko lepši izraz

$$\begin{aligned} \hat{H}_l\,|k\rangle = J'S^2\,|k\rangle + &\\ \frac{S}{\sqrt{2SN}} \Big[&\left(Je^{ika(l+1)} - J'e^{ikal} \right) \hat{S}_l^- + \\ &\left(Je^{ikal} - J'e^{ika(l+1)} \right) \hat{S}_{l+1}^- \Big] \,|0\rangle \,. \end{aligned}$$

Prvi člen ni odvisen od l, zato bo v vsoti $\hat{H}\,|k\rangle$ samo pomnožen z N in bo dal energijo osnovnega stanja. V drugih dveh členih pa izpostavimo iz prvega $\exp(ikal)$, iz drugega pa $\exp(ika(l+1))$. Faktorja, ki ostaneta, nista odvisna od l in ju iz vsote izpostavimo, vsota pa se sešteje v $|k\rangle$. Tako dobimo

$$\hat{H}\,|k\rangle = E_0\,|k\rangle - S\left(Je^{ika} + Je^{-ika} - 2J' \right) |k\rangle \,.$$

Energija magnona je desni člen, ki se poenostavi v

$$\varepsilon(k) = E(k) - E_0 = 2S(J' - J\cos ka).$$

Za izotropen magnet dobimo že znani rezultat $\varepsilon(k) = 4JS\sin^2(ka/2)$, ki je enak 0 pri $k = 0$. V anizotropnem primeru pa očitno ni tako. Takoj vidimo tudi, da je magnonska energija v primeru $J > J'$ *negativna* in torej zniža celotno energijo sistema. Osnovno stanje tedaj ni več feromagnetna ureditev, temveč magnon s $k = 0$.