Magnonska diseprzija v 1D Heisenbergovem in Isingovem modelu

9. april 2013

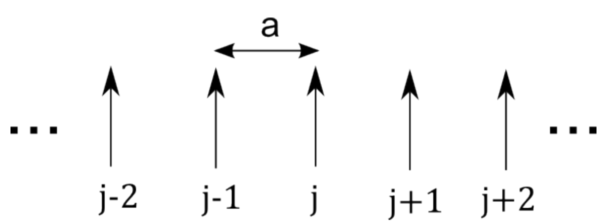
1 Naloga

Določi energijsko disperzijo magnonov v enodimenzionalnem Heisenbergovem modelu,

$$H = -J\sum_j \mathbf{S_j S_{j+1}} \tag{1}$$

pri tem je $J > 0$ in $\mathbf{S_j} = (S_j^x, S_j^y, S_j^z)$ vektor spinskih operatorjev za j-ti spin, ki se nahaja na mestu $R_j = ja$, pri čem je a razdalja med sosednjmi spini na mreži(gl. sliko 1). Določi jo tudi za 1D Isingov model,

$$H = -J\sum_j S_j^z S_{j+1}^z \tag{2}$$



Slika 1: 1D feromagnetna Bravaisova mreža spinov z mrežno konstanto a v okolici j-tega spina.

2 Rešitev

Spinski valovi so superpozicija stanj feromagnetnega sistema, katera imajo samo na enem mestu mreže za ena zmanjšan spin(gl. sliko 2) $|R_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2S}} S_j^- |0\rangle$, pri tem je $|0\rangle$ osnovno stanje feromagnetnega sistema pri katerem so vsi spini obrnjeni v isto smer(slika 1).[1]

Slika 2: 1D feromagnetna Bravaisova mreža spinov, ki ima obrnjen en spin na j-tem mestu, kar ustreza stanju $|R_j\rangle$, ko je $S = \frac{1}{2}$.

Operatorja $S_j^{\pm}$ dvigujeta in nižata spin na j-tem mestu mreže po spodnjih relacijah:

$$\begin{aligned} S_j^+ |S_j^z\rangle &= \sqrt{(S - S^z)(S + 1 + S^z)} |S^z + 1\rangle\,;\, S^z < S, \\ &= 0\,;\, S^z = S \\ S_j^- |S_j^z\rangle &= \sqrt{(S + S^z)(S + 1 - S^z)} |S^z - 1\rangle\,;\, S^z > -S, \\ &= 0\,;\, S^z = -S \end{aligned} \tag{3}$$

[1] Faktor $\frac{1}{\sqrt{2S}}$ sledi iz normalizacije valovne funkcije(gl. enačbo 3).

pri čem je S spin delca na j-tem mestu.
Magnon je sestavljen iz linearne kombinacije vseh stanj, ki imajo le en znižan spin na vseh različnih mestih mreže in ga opišemo z valovnim vektorjem[2] $\mathbf{k}$:

$$|\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j |\mathbf{R}_j\rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R_j}} \tag{4}$$

Pri tem so $\mathbf{R}_j$ točke na Bravaisovi mreži. To velja za magnone v splošni 3D mreži. V našem 1D primeru se zapis magnona poenostavi na

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j |R_j\rangle e^{ikR_j}, \tag{5}$$

in je $R_j = ja$, N pa število točk mreže. Faktor pred vsoto spet sledi iz normalizacijskega pogoja.
Izpeljava je zelo podobna splošnemu 3D primeru v [1], z eno dodatno omejtvijo zaradi drugačnega Hamiltoniana v našem primeru, ki je podrobneje opisana pri naslednjih dveh enačbah.
Naš Hamiltonian(enačba 1) vsebuje skalarni produkt operatorskih vektorjev in če ga razpišemo dobimo:

$$H = -J \sum_j S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y + S_j^z S_{j+1}^z \tag{6}$$

Z upoštevanjem relacije $S_j^{\pm} = S_x \pm iS_y$ ga lahko zapišemo drugače:

$$H = -J \sum_j S_j^z S_{j+1}^z + \frac{1}{2}\left(S_j^- S_{j+1}^+ + S_j^+ S_{j+1}^-\right) \tag{7}$$

Zgornja enačba se razlikuje od izpeljave v Ashcroftu[1] po tem, da je tam zapisan Hamiltonian, ki upošteva izmenjalno interakcijo po vseh parih splošne 3D Bravaisove mreže:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{R},\mathbf{R}'} J(\mathbf{R}-\mathbf{R}')S^z(\mathbf{R})S^z(\mathbf{R}') - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{R},\mathbf{R}'} J(\mathbf{R}-\mathbf{R}')S^+(\mathbf{R})S^-(\mathbf{R}') \tag{8}$$

Ker v zgornjem priemru teče vsota po vseh točkah mreže dvakrat nastopata pred vsotama faktorja $\frac{1}{2}$, da se posamezna parska interakcija upošteva le enkrat. Iz istega razloga se lahko združita člena, ki sta ločena v enačbi 7, saj v tem primeru sicer ločeni vsoti data enako vrednost, ker obe seštevata po stanjih, ko je na na vsakem mestu znižan ali zvišan spin. V našem primeru pa imamo vsoto zapisano le z interakcijo med sosedi in ni vseeno na katerega deluje, saj pri obeh členih delujeta na isto mesto mreže različna operatorja, enkrat S^+ in drugič S^-.
Za magnon vemo, da je lastno stanje Heisenbergovega feromagneta, zato dobimo energijo enostavno tako, da z Hamiltonianom delujemo na magnon:

$$H|k\rangle = E(k)|k\rangle \tag{9}$$

Najprej si poglejmo kakšne prispevke dajo posamezni členi vsote v enačbi 7, če delujemo na stanje $|R_i\rangle$, iz katerih je sestavljen magnon. $|R_i\rangle$ je lastno stanje vseh operatorjev S_j^z, in sicer:

$$\begin{aligned} S_j^z|R_i\rangle &= S|R_i\rangle\,;\, j \neq i \\ &= (S-1)|R_i\rangle\,;\, j = i \end{aligned} \tag{10}$$

Iz tega vidimo, da bomo za vsak člen vsote $-J\sum_j S_j^z S_{j+1}^z$, ki deluje na stanje $|R_i\rangle$ dobili vrednost S^2, razen kadar je $j = i$ in $j+1 = i$, ko dobimo dvakrat vrednost $S(S-1)$. Torej je vrednost omenjene vsote večja od osnovnega stanja feromagneta(prvi člen spodnje enačbe) za $2JS$. Ker je magnon superpozicija stanj $|R_i\rangle$, dobimo za njega enako lastno vrednost:

[2] Glej [1] str. 705.

$$-J\sum_j S_j^z S_{j+1}^z|k\rangle = (-NJS^2 + 2JS)|k\rangle \tag{11}$$

Z upoštevanjem enačb 3 vidimo, da ostali členi Hamiltoniana, zamenjajo lokacijo znižanega spina, in sicer dobimo:

$$\begin{aligned}
S_j^+ S_{j+1}^-|R_i\rangle &= 2S|R_{i-1}\rangle\,;\, j=i \\
&= 0\,;\, j\neq i \\
S_j^- S_{j+1}^+|R_i\rangle &= 2S|R_{i+1}\rangle\,;\, j=i+1 \\
&= 0\,;\, j\neq i+1
\end{aligned} \tag{12}$$

Prisepevek drugega dela Hamiltoniana je torej[3]:

$$\begin{aligned}
&-\frac{J}{2}\sum_j S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^- S_{j+1}^+|k\rangle = -\frac{J}{2\sqrt{N}}\left(\sum_j S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^- S_{j+1}^+\right)\left(\sum_l e^{ikR_l}|R_l\rangle\right) = \\
&= -\frac{JS}{\sqrt{N}}\sum_l e^{ikR_l}\left(|R_{l-1}\rangle + (|R_{l+1}\rangle\right) = -\frac{JS}{\sqrt{N}}\left(\sum_l e^{ikla}|R_{l-1}\rangle + \sum_l e^{ikla}|R_{l+1}\rangle\right) = \\
&= -\frac{JS}{\sqrt{N}}\left(\sum_l e^{ika(l-1)}e^{ika}|R_{l-1}\rangle + \sum_l e^{ika(l+1)}e^{-ika}|R_{l+1}\rangle\right) = \\
&= -JS\left(e^{ika}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_q e^{ikq}|R_q\rangle + e^{-ika}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_p e^{ikp}|R_p\rangle\right) = \\
&= -JS\left(e^{ika} + e^{-ika}\right)|k\rangle = -2JS\cos ka|k\rangle
\end{aligned} \tag{13}$$

Na koncu smo še zamenjali indeks l najprej z $q = l-1$ in potem še z $p = l+1$ in upoštevali, da na neskončno vrsto ne vpliva, če pri seštevanju premaknemo indeks za 1. Tako smo lahko v novo zapisanih vsotah dvakrat prepoznali definicijo magnona $|k\rangle$.

Če združimo enačbi 13 in 11 dobimo za disperzijsko relacijo spodnji rezultat:

$$E(k) = -NJS^2 + 2JS(1-\cos ka) \tag{14}$$

Poglejmo še kakšna je disperzija še za 1D Isingov model(enačba 2). Vidimo, da se v tem primeru računanje precej poenostavi, in sicer lahko kar uporabimo rezultat za splošno vrednost spina, ki smo ga dobili, ko smo računali prispevek prvega člena Heisenbergovega Hamiltoniana(enačba 11). Upoštevajmo še, da je v Isingovem modelu $S = \frac{1}{2}$ in dobimo rezultat:

$$E = -\frac{NJ}{4} + J \tag{15}$$

Vidimo da v zgornji enačbi energija ni odvisna od valovnega vektorja k. Torej je Isingov model preveč poenostavljen, da bi lahko napovedal magnone.

Literatura

[1] Ashcroft, Neil W. Mermin, David N., 1976. *Solid State Physics*. New York; Holt, Rinehart and Winston.

[3] V tretjem koraku smo upoštevali dejstvo, da je $R_l = la$.