FIZIKA TRDNE SNOVI, DOMAČA NALOGA

Debyeva frekvenca v dvodimenzionalnem kristalu s kvadratno mrežo

Gregor Plohl

Naloga

Imamo dvodimenzionalno kvadratno mrežo z mrežno razdaljo $a = 3\text{Å}$. Izračunati moramo Debyevo frekvenco ω_D pri hitrosti zvoka $c = 10^3\ m/s$.

Rešitev

Debyeva frekvenca je definirana kot

$$\int_0^{\omega_d} g(\omega)\mathrm{d}\omega = N \tag{1}$$

kjer je N celotno število fononskih stanj in $g(\omega)$ gostota stanj.
V kvadratni mreži z dolžino stranice L je število dovoljenih vrednosti valovnega vektorja na enoto volumna v *k*- prostoru enako

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \tag{2}$$

Celotno število fononskih stanj pa dobimo, če vrednost (2) pomnožimo s ploščino kroga s polmerom, ki je enak dolžini valovnega vektorja

$$N = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi k^2 \tag{3}$$

Upoštevamo disperzijsko relacijo $\omega = ck$ in dobimo izraz za gostoto stanj

$$g(\omega) = \frac{dN}{d\omega} = \frac{L^2}{2\pi} k \cdot \frac{dk}{d\omega} = \frac{L^2}{2\pi}\frac{\omega}{c^2} \tag{4}$$

Velja še, da je celotno število stanj enako številu osnovnih celic v mreži:

$$N = \left(\frac{L}{a}\right)^2 \tag{5}$$

Sedaj lahko izračunamo integral (1):

$$\int_0^{\omega_d} g(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{L^2}{2\pi c^2}\int_0^{\omega_d} \omega \cdot \mathrm{d}\omega = \frac{L^2\omega_D^2}{2\pi c^2} = \left(\frac{L}{a}\right)^2 \tag{6}$$

Debyeva frekvenca je tako

$$\omega_D = 2\sqrt{\pi}\frac{c}{a} = 1.18 \cdot 10^{13} s^{-1} \tag{7}$$

Do rezultata lahko pridemo tudi hitreje, če v izraz (3) vstavimo $k = k_D = \omega_D/c$ in ga izenačimo z izrazom (5).