

Fizika trdne snovi

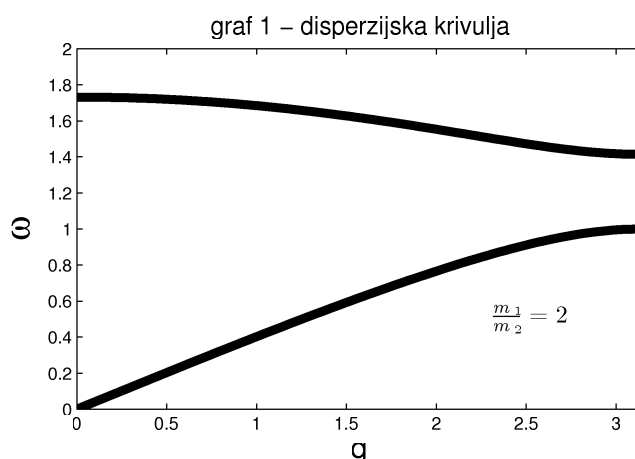
domača naloga

Tadeja Polach

Mrežna nihanja dvoatomne verige

Disperzija dvoatomne linearne verige ima dve veji, ki ju opisuje enačba

$$\omega^2 = k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \pm k \left[\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^2 - \frac{4}{m_1 m_2} \sin^2 \frac{qa}{2} \right]^{1/2}$$



V enotski celici sta dva atoma z masama m_1 in m_2 , atomi so povezani z vzmetjo k .

- Izračunaj hitrost zvoka.
- Pokaži, da je za $m_1 = m_2$ disperzijska krivulja ekvivalentna disperzijski krivulji enoatomne verige.

Rešitev:

- Hitrost zvoka opisuje enačba

$$v_{zvok} = \frac{\partial \omega}{\partial q}, \quad q \rightarrow 0$$

Za majhne q razvijemo kvadratni koren:

$$\sqrt{a+x} = \sqrt{a} \sqrt{1 + \frac{x}{a}} \rightarrow \sqrt{a} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x}{a}\right)$$

in sinus

$$\sin^2 \frac{qa}{2} \rightarrow \left(\frac{qa}{2}\right)^2$$

Tako izraz za spodnjo vejo zapišemo:

$$\omega^2 \approx k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) - k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\frac{4}{m_1 m_2} \frac{q^2 a^2}{4}}{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^2}\right]$$

$$\omega^2 \approx \frac{k \frac{4}{m_1 m_2} \frac{q^2 a^2}{4}}{2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} \quad \text{oz.} \quad \omega \approx qa \sqrt{\frac{k}{2(m_1 + m_2)}}$$

Hitrost zvoka je:

$$v_{zvok} = a \sqrt{\frac{k}{2(m_1 + m_2)}}$$

b) Ko sta masi enaki, $m = m_1 = m_2$, se izraz za disperzijo poenostavi v:

$$\omega^2 = k \frac{2}{m} \pm k \sqrt{\left(\frac{2}{m}\right)^2 - \frac{4}{m^2} \sin^2 \frac{qa}{2}}$$

$$\omega^2 = \frac{2k}{m} \left(1 \pm \left[1 - \sin^2 \frac{qa}{2}\right]^{1/2}\right)$$

$$\omega^2 = \frac{2k}{m} \left(1 \pm \cos \frac{qa}{2}\right)$$

q je definiran na območju $-\frac{\pi}{2} < q < \frac{\pi}{2}$

Upoštevajoč zvezi

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x \quad 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x,$$

zgornji izraz prepisemo in dobimo dve rešitvi

$$\omega_1^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{qa}{4} \quad \omega_2^2 = \frac{4k}{m} \cos^2 \frac{qa}{4}$$

V primeru enoatomne verige se osnovna celica zmanjša v $a' = a/2$. Izraza za disperzijo tako postaneta

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4k}{m}} \sin \frac{qa'}{2} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{m}} \cos \frac{qa'}{2}$$

Kozinus je za $\pi/2$ zamaknjen kot sinus, zato je zgornja rešitev ekvivalentna rešitvi enodimenzionalne verige.

$$\omega = \sqrt{\frac{4k}{m}} \sin \frac{qa'}{2}$$

