Sipanje na končni potencialni jami (KPJ)

1 Sodi potencial in degenerirana stanja

1.1 Naloga

Pokaži, da lahko tudi pri degeneriranih stanjih izberemo sode in lihe lastne funkcije, če je potencial $V(-x) = V(x)$

1.2 Rešitev

Če je potencial sodi sledi, da je tudi Hamiltonian $\hat{H}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$ sodi:

$$\hat{H}(-x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial(-x)^2} + V(-x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial(x)^2} + V(x) = \hat{H}(x) \tag{1}$$

Če zapišemo Schrödingerjevo enačbo z Hamiltonianom

$$\hat{H}(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

in v enačbi zamenjamo $x \to -x$

$$\hat{H}(-x)\psi(-x) = E\psi(-x)$$

ter uporabimo enačbo (1) dobimo

$$\hat{H}(x)\psi(-x) = E\psi(-x)$$

iz česar sledi, da je tudi $\psi(-x)$ rešitev Schrödingerjeve enačbe.

Enodimenzionalna Schrödingerjeva enačba ima dve linearno neodvisni rešitvi. Če predpostavimo, da imamo opravka z degeneriranimi stanji, potem sta $\psi(x)$ in $\psi(-x)$ linearno neodvisni. Iz njiju lahko tvorimo novo bazo iz lihe in sode funkcije:

$$\psi_S(x) = \psi(x) + \psi(-x) \tag{2}$$

$$\psi_L(x) = \psi(x) - \psi(-x) \tag{3}$$

Tako smo pokazali, da lahko tudi za degenerirana stanja vedno izberemo sode in lihe lastne funkcije.