Kvantna mehanika I
Vrtilna količina I

Marko Petrič
marko.petric@guest.arnes.si
Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
(Dated: 21. maj 2007)

I. NALOGA

Delec je v stanju z valovno funkcijo $\psi(\mathbf{r}) = A(x+2y+iz)e^{-\alpha r}$, kjer je $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
· Izračunaj pričakovano vrednost operatorjev $\mathbf{L}^2$, L_x, L_y in L_z.
· Kolikšna je verjetnost, da pri meritvi L_z izmerimo vrednost $\hbar$?

II. REŠITEV

Kot prvo prepišemo valovno funkcijo v krogelne koordinate

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi\sin\theta \quad , \\ y &= r\sin\phi\sin\theta \quad , \\ z &= r\cos\theta \quad . \end{aligned}$$

Tako se valovna funkcija ψ transformira v

$$\begin{aligned} \psi(r) &= a\left(\sin\theta\cos\phi + 2\sin\theta\sin\phi + i\cos\theta\right) re^{-\alpha r} \quad , \\ \psi(\mathbf{r}) &= \sum_{n,l,m} R_{n,l,m}(r) Y_{l,m}(\theta,\phi) A_{n,l,m} \quad . \end{aligned}$$

Ker želimo valovno funkcijo razviti po sfernih harmonikih, se spomnimo prvih par relevantnih harmonikov, to so

$$\begin{aligned} Y_{0,0}(\theta,\phi) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}} \quad , \\ Y_{1,0}(\theta,\phi) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta \quad , \\ Y_{1,1}(\theta,\phi) &= \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi} \quad , \\ Y_{1,-1}(\theta,\phi) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\, e^{-i\phi} \quad . \end{aligned}$$

Sedaj lahko prepišemo $\psi(\mathbf{r})$ s harmoniki v sledečo obliko

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= a\Bigg(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(Y_{1,1} - Y_{1,-1}\right) + \\ &+ i\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(Y_{1,1} + Y_{1,-1}\right) + i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1,0}\Bigg) R(r) \quad , \\ \psi(\mathbf{r}) &= a\Bigg(\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(i - \frac{1}{2}\right) Y_{1,1} + \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(i + \frac{1}{2}\right) Y_{1,-1} + \\ &+ i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1,0}\Bigg) R(r) \quad , \\ R(r) &= re^{-\alpha r} \quad . \end{aligned}$$

Slednji zapis lahko prepišemo v Diracovo notacijo

$$|\psi\rangle = a|R\rangle\left(A_1|1,1\rangle + A_0|1,0\rangle + A_{-1}|1,-1\rangle\right) \quad ,$$

kjer skalarni faktorji A_i predstavljajo

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(i - \frac{1}{2}\right) \quad , \\ A_0 &= i\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \quad , \\ A_{-1} &= \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(i + \frac{1}{2}\right) \quad . \end{aligned}$$

Sedaj določimo neznane faktorje z normalizacijo

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &= 1 \quad , \\ \langle R|R\rangle &= 1 \quad , \\ a^2\left(|A_1|^2 + |A_0|^2 + |A_{-1}|^2\right) &= 1 \quad , \\ \frac{1}{\sqrt{|A_1|^2 + |A_0|^2 + |A_{-1}|^2}} &= a \quad . \end{aligned}$$

Iz zadnjege enačbe lahko izračunamo, da je skalarni faktor $a = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}$.

Sedaj se lahko lotimo določevanja pričakovane vrednosti operatorja $\mathbf{L}^2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2|l,m\rangle &= \hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle \quad , \\ \mathbf{L}^2|\psi\rangle &= a\left(A_1 2\hbar^2|1,1\rangle + A_0 2\hbar^2|1,0\rangle + A_{-1}2\hbar^2|1,-1\rangle\right)|R\rangle \quad , \\ \mathbf{L}^2|\psi\rangle &= 2\hbar^2|\psi\rangle \quad , \\ \langle\psi|\mathbf{L}^2|\psi\rangle &= 2\hbar^2 \quad . \end{aligned}$$

Na podoben način lahko izračunamo tudi L_z

$$
\begin{aligned}
L_z|l,m\rangle &= \hbar m|l,m\rangle \quad , \\
L_z|\psi\rangle &= (A_1\hbar|1,1\rangle - A_{-1}\hbar|1,-1\rangle)\,|R\rangle \quad , \\
\langle\psi|L_z|\psi\rangle &= \hbar|A_1|^2 - \hbar|A_{-1}|^2 \quad , \\
\langle\psi|L_z|\psi\rangle &= 0 \quad .
\end{aligned}
$$

Da bi izračunali še preostala operatorja L_x in L_y, se spomnimo *ladder* operatorja za vrtilno količino L_+

$$
\begin{aligned}
L_+ &= L_x + iL_y \quad , \\
L_+|l,m\rangle &= \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}|l,m+1\rangle \quad , \\
\langle L_+\rangle &= \langle L_x + iL_y\rangle \quad , \\
\langle L_+\rangle &= \langle L_x\rangle + i\langle L_y\rangle \quad , \\
\langle L_x\rangle &= \mathrm{Re}\,(\langle L_+\rangle) \quad , \\
\langle L_y\rangle &= \mathrm{Im}\,(\langle L_+\rangle) \quad .
\end{aligned}
$$

Sedaj lahko uporabimo L_+ na naši valovni funkciji

$$
\begin{aligned}
L_+|\psi\rangle &= \hbar\left(A_0\sqrt{2}|1,1\rangle + A_{-1}\sqrt{2}|1,0\rangle\right)|R\rangle \quad , \\
\langle\psi|L_+|\psi\rangle &= \sqrt{2}\hbar\,(A_1^*A_0 + A_0^*A_{-1}) \quad , \\
\mathrm{Re}\,(\langle\psi|L_+|\psi\rangle) &= \frac{2}{3}\hbar \quad , \\
\mathrm{Im}\,(\langle\psi|L_+|\psi\rangle) &= -\frac{1}{3}\hbar \quad .
\end{aligned}
$$

Odgovorimo še na vprašanje, kakšna je verjetnost, da izmerimo $L_z = \hbar$. Operator je $L_z|l,m\rangle = \hbar m|l,m\rangle$, torej je edina možnost, da izmerimo $\hbar$, da je delec v stanju z $m = 1$. Verjetnost, da delec zaznamo v takšnjem stanju je preprosta, saj so funkcije v našem razvoju ortogonalne, torej je to kar kvadrat absolutne vrednosti skalarnega koeficienta pred ustrezno funkcijo, to je $|A_1|^2 = \frac{5}{12}$.