

1 Naloga

Obravnavaj enodimenzionalni harmonski oscilator s hamiltonianom

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)x^2}{2}, \text{ kjer je}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \delta\omega \cos(\Omega t) \text{ in } \delta\omega \ll \omega_0.$$

Ob $t = 0$ je sistem v osnovnem stanju. V prvem redu perturbacije poišči verjetnosti, da se ob času t sistem nahaja v n -tem vzbujenem stanju.

2 Rešitev

Najprej razpišemo Hamiltonian s pomočjo zveze $\omega(t) = \omega_0 + \delta\omega \cos(\Omega t)$.

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{mx^2}{2}(\omega_0 + \delta\omega \cos(\Omega t))^2 \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + mx^2\omega_0\delta\omega \cos(\Omega t) + \frac{mx^2}{2}\delta\omega^2 \cos^2(\Omega t) \\ &= H_0 + H' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H' &= mx^2\omega_0\delta\omega \cos(\Omega t) + \frac{mx^2}{2}\delta\omega^2 \cos^2(\Omega t) \\ &= mx^2\omega_0\delta\omega \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da je $\delta\omega \ll \omega_0$. Sistem je na začetku v lastnem stanju nezmotenega Hamiltoniana

$$H|m, t\rangle = e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}}|m\rangle = e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}}|m\rangle,$$

kjer je m stanje pred motnjo, za naš primer osnovno stanje ($m = 0$). Verjetnost $c_n(t)$, da se sistem po motnji H' nahaja v n -tem vzbujenem stanju je:

$$c_n(t) = c_n(t = 0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t c_m(t') \langle n, t | H'(t) | m, t \rangle dt'$$

$c_n(t = 0)$ je verjetnost, da se sistem na začetku nahaja v stanju $|m\rangle$. Za

naš primer je $c_n(t = 0)$ enak nič, saj se sistem na začetku nahaja v osnovnem stanju. Upoštevamo tudi, da je verjetnost $c_m(t)$, da se sistem na začetku nahaja v stanju m enaka ena. Tako dobimo zvezo

$$\begin{aligned} c_n(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle n | H'(t) | m \rangle dt' \\ &= -\frac{i}{\hbar} m \omega_0 \delta \omega \int_0^t \langle n, t' | x^2 \cos(\Omega t') | 0, t' \rangle dt' \\ &= -\frac{i}{\hbar} m \omega_0 \delta \omega \langle n | x^2 | 0 \rangle \int_0^t \cos(\Omega t') \exp\left(\frac{it'(E_n - E_0)}{\hbar}\right) dt' \end{aligned}$$

Izraz $\langle n | x^2 | 0 \rangle$ napišemo kot $\langle xn | x0 \rangle$ in uporabimo zvezo

$x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a + a^+)$, kjer sta

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \text{ in } a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

anihilacijski in kreacijski operator, x_0 pa $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Tako dobimo izraza

$$|xn\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle) \text{ in}$$

$$|x0\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

Razvidno je, da je izraz $\langle xn | x0 \rangle$ različen od nič le, če je $n = 0$ (osnovno stanje) ali $n = 2$ (drugo vzbujeno stanje). Ker iščemo verjetnost, da se sistem po motnji nahaja v vzbujenem stanju se bomo ukvarjali samo s primerom za $n = 2$. Takrat dobimo

$$\langle xn | x0 \rangle = \frac{x_0^2}{2} \sqrt{2}$$

Rezultat vstavimo v enačbo za $c_n(t)$, upoštevamo, da je

$$E_n - E_0 = \hbar\omega_0(2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 2\hbar\omega_0$$

ter integriramo:

$$\begin{aligned}
c_n(t) &= -\frac{i}{\hbar} m \omega_0 \delta \omega \frac{x_0^2}{2} \sqrt{2} \int_0^t e^{2it'\omega_0} \cos(\Omega t) dt' \\
&= -\frac{i\sqrt{2}\delta\omega m\omega_0 x_0^2 (-2i\omega_0 + \exp(2i\omega_0 t)(2i \cos(\Omega t) + \Omega \sin(\Omega t)))}{2\hbar(\Omega^2 - 4\omega_0^2)}
\end{aligned}$$

Verjetnost, da se sistem v času t nahaja v drugem vzbujenem stanju je

$$\begin{aligned}
P(t, n = 2) &= |c_n(t)|^2 \\
&= \frac{\delta^2 \omega m^2 \omega_0^2 x_0^4}{2\hbar(\Omega - 4\omega_0^2)^2} (4\omega_0^2 + 4\omega_0^2 \cos^2(\Omega t) + \Omega^2 \sin^2(\Omega t) - 4\omega_0^2 \cos(\Omega t)(\exp(2i\omega_0 t) + \exp(-2i\omega_0 t)) + \\
&\quad 2i\omega_0 \Omega \sin(\Omega t)(\exp(2i\omega_0 t) - \exp(-2i\omega_0 t))) \\
&= \frac{\delta^2 \omega m^2 \omega_0^2 x_0^4}{2\hbar(\Omega - 4\omega_0^2)^2} (4\omega_0^2 + 4\omega_0^2 \cos^2(\Omega t) + \Omega^2 \sin^2(\Omega t) - 8\omega_0^2 \cos(\Omega t) \cos(2\omega_0 t) - 4\omega_0 \Omega \sin(\Omega t) \sin(2\omega_0 t))
\end{aligned}$$