Naloga

Obravnavaj delec v neskončni potencialni jami med $-\frac{a}{2}$ in $\frac{a}{2}$ z dodatnim potencialom $\lambda\delta(x)$:

1. Pokaži, da so liha lastna stanja takega sistema enaka lihim lastnim stanjem neskončne potencialne jame.
2. Izpelji transcendentno enačbo za energije sodih lastnih stanj.
3. Izračunaj energijo in valovno funkcijo osnovnega stanja ob predpostavki, da je $x_0 = \frac{m\lambda a}{\hbar^2} \gg 1$.
4. Obravnavaj osnovno stanje sistema v limiti $x_0 \to \infty$.
5. Ob $t = 0$ je delec v osnovem stanju v levi polovici potencialne jame z $x_0 = \infty$. Nato potencialno bariero nekoliko znižamo, tako da velja $\infty > x_0 \gg 1$. Razvij valovno funkcijo delca po lastnih stanjih tega sistema.

Rešitev

1. Potencial je oblike:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{za } |x| > \frac{a}{2}, \\ \lambda\delta(x) & \text{za } |x| < \frac{a}{2}. \end{cases}$$

   Pogoj za funkcijo δ je $-\frac{\hbar^2}{2m}(\psi'(0^+) - \psi'(0^-)) + \lambda\psi(0) = 0$. Lihe lastne funkcije neskončne potencialne jame so:

$$\psi_L(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi n}{a}x\right),$$

   katere ustrezaju tudi pogoju za δ funkcijo in našemu problemu. Energije lihih lastnih stanj pa so

$$E = \frac{2\hbar^2\pi^2 n^2}{ma^2}$$

2. Sode lastne funkcije, ki ustrezajo našemu problemu so:

$$\psi_S(x) = \begin{cases} A\sin[(x - \frac{a}{2})k] & \text{za } x > 0, \\ A\sin[(-x - \frac{a}{2})k] & \text{za } x < 0. \end{cases}$$

   Ko to vstavimo v pogoj za δ funkcijo, dobimo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(Ak\cos(k\frac{a}{2}) + Ak\cos(k\frac{a}{2})) - \lambda A\sin(k\frac{a}{2}) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{m}Ak\cos(k\frac{a}{2}) = \lambda A\sin(k\frac{a}{2})$$

$$\tan(\frac{x}{2}) = -\frac{x}{x_0}$$

   kjer je

$$x = ka$$

   energija pa

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

3. Rešitev zgornje enačbe ko je $x_0 \gg 1$ je okoli 2π, ko razvijemo $\tan(\frac{x}{2})$ okoli 2π dobimo $\tan(\frac{x}{2}) \approx \frac{1}{2}(x-2\pi)$, $x = 2\pi + \epsilon$ in naša rešitev je

$$\epsilon = -\frac{4\pi}{x_0}$$

$$E = \frac{2\hbar^2\pi^2}{ma^2} - \frac{8\hbar^2\pi^2}{mx_0a^2}$$

da bi imeli celotno lastno funkcijo, jo moramo še normalizirati, tako da je

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \psi_S(x)^*\psi_S(x)dx = 1$$

po krajšem računu dobimo

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sin(ka)}{ka}}}$$

4. Ko gre $x_0 \to \infty$ je $\tan(\frac{x}{2}) \approx 0$ in $x = ka = 2\pi n$, energija osnovnega stanja je v tem primeru

$$E = \frac{2\hbar^2\pi^2}{ma^2}$$

Energiji sodega in lihega lastnega stanja sta enaki. Valovni funkciji pa sta

$$\psi_L(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$$

$$\psi_S(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin[(x-\frac{a}{2})\frac{2\pi}{a}] & \text{za } x > 0, \\ \sqrt{\frac{2}{a}}\sin[(-x-\frac{a}{2})\frac{2\pi}{a}] & \text{za } x < 0. \end{cases}$$

5. Ob času $t = 0$ je $x_0 = \infty$ in imamo delec na levi strani našega potenciala. Valovna fukcija tega stanja je enaka

$$\psi_{LEVA} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin\left(\tfrac{2\pi}{a}x\right) - \sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin\left[(-x-\tfrac{a}{2})\tfrac{2\pi}{a}\right]) \quad \text{za } x < 0$$
$$\psi_{LEVA} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin\left(\tfrac{2\pi}{a}x\right) - \sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin\left[(x-\tfrac{a}{2})\tfrac{2\pi}{a}\right]) \quad \text{za } x > 0$$

Ko pa bariero znižamo, pa kot smo videli pri drugem vprašanju, sode lastne funkcije ne ostanejo enake. Sedaj razvijemo ψ_{LEVA} po lastnih funkcijah pri $\infty > x_0 \gg 1$. V splošnem je razvoj

$$\psi = \sum_n c_n\psi_n \text{ koeficienti pa so } c_n = \int \psi_n^*\psi dx$$

V našem primeru je

$$c_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ in } c_S = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sin(2\pi-\frac{4\pi}{x_0})}{2\pi-\frac{4\pi}{x_0}}}}\frac{x_0^2\sin(\frac{2\pi}{x_0})}{2\pi(x_0-1)}$$

kjer je

$$\frac{x_0^2\sin(\frac{2\pi}{x_0})}{2\pi(x_0-1)} \approx 1 \text{ in } \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sin(2\pi-\frac{4\pi}{x_0})}{2\pi-\frac{4\pi}{x_0}}}} \approx 1-\frac{1}{x_0}$$

tako dobimo

$$\psi_{LEVA} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) - \sin\left((-x-\frac{a}{2})(\frac{2\pi}{a}-\frac{4\pi}{ax_0})\right) + \frac{1}{x_0}\sin\left((-x-\frac{a}{2})(\frac{2\pi}{a}-\frac{4\pi}{ax_0})\right)\right)$$

za $x < 0$,

$$\psi_{LEVA} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) - \sin\left((x-\frac{a}{2})(\frac{2\pi}{a}-\frac{4\pi}{ax_0})\right) + \frac{1}{x_0}\sin\left((x-\frac{a}{2})(\frac{2\pi}{a}-\frac{4\pi}{ax_0})\right)\right)$$

za $x > 0$.