DOMAČA NALOGA IZ KVANTNE MEHANIKE
Vladimir Radulovič
vp. št. 28030220

1 Naloga

Za sistem dveh delcev s spinom 1/2 velja:

$$\begin{aligned} S_{1x}|\Psi\rangle &= \frac{\hbar}{2}|\Psi\rangle \\ S_{2y}|\Psi\rangle &= \frac{\hbar}{2}|\Psi\rangle \end{aligned}$$

Kolikšna je verjetnost, da ob meritvi velikosti celotnega spina sistema delcev izmerimo vrednost 0?

2 Rešitev

Gornja pogoja lahko povemo bolj preprosto. En spin kaže v smer x, drugi pa v smer y. Glavna os kartezičnega koordinatnega sistema bo kot ponavadi os z. Stanja bomo ločevali glede na velikost skupnega spina in njegovo komponento v smer z.

2.1 Baza

Vsak izmed spinov je lahko glede na os z obrnjen gor ali dol. Za sistem dveh spinov so torej možna štiri produktna stanja:

$$|\uparrow\uparrow\rangle \qquad |\uparrow\downarrow\rangle \qquad |\downarrow\uparrow\rangle \qquad |\downarrow\downarrow\rangle \tag{1}$$

Za ta stanja velja, da je njihova skupna z-komponenta spina kar vsota z-komponent spina za posamezna stanja:

$$\begin{aligned} &S_z|\chi_1\chi_2\rangle = [S_{1z}+S_{2z}]|\chi_1\chi_2\rangle = [S_{1z}|\chi_1\rangle]|\chi_2\rangle + |\chi_1\rangle[S_{2z}|\chi_2\rangle] = \\ &[\hbar m_1|\chi_1\rangle]|\chi_2\rangle + |\chi_1\rangle[\hbar m_2|\chi_2\rangle] = \hbar[m_1+m_2]|\chi_1\chi_2\rangle \end{aligned} \tag{2}$$

V gornji enačbi sta χ_1 in χ_2 lahko $\uparrow$ ali $\downarrow$, operator S_{1z} deluje le na spinski del valovne funkcije prvega delca, operator S_{2z} pa le na spinski del valovne funkcije drugega delca. Stanja, ki sestavljajo gornjo bazo imajo dobro določeno z-komponento spina. Da lahko problem rešimo, bomo potrebovali tudi bazo z dobro določeno velikostjo spina. Stanja, ki to bazo stestavljajo smo vajeni pisati kot $|sm\rangle$, kjer s nam poda velikost skupnega spina in m njegovo projekcijo v smer z. Za to bazo velja naslednje:

$$\begin{aligned} m &= m_1+m_2 \\ s &= |s_1-s_2|, |s_1-s_2|+1, \ldots, |s_1+s_2| \\ S_z|sm\rangle &= \hbar m|sm\rangle \\ S^2|sm\rangle &= \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle \end{aligned} \tag{3}$$

Povezava med produktnimi stanji in stanji v notaciji $|sm\rangle$ je sledeča:

$$
\begin{aligned}
|1,1\rangle &\quad\leftrightarrow\quad |\uparrow\uparrow\rangle \\
|1,0\rangle &\quad\leftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right] \\
|1,-1\rangle &\quad\leftrightarrow\quad |\downarrow\downarrow\rangle \\
|0,0\rangle &\quad\leftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right]
\end{aligned} \tag{4}
$$

K temu se bomo vrnili kasneje.

2.2 Začetna valovna funkcija sistema

Iščemo splošno valovno funkcijo sistema dveh spinov $|\psi\rangle$. Določili jo bomo tako, da bomo zapisali njeno najbolj splošno obliko, oz. linearno kombinacijo baznih funkcij, nato pa upoštevali začetna pogoja za projekciji spinov. Nastavek za $|\psi\rangle$ je:

$$
|\psi\rangle = a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\uparrow\downarrow\rangle + c|\downarrow\uparrow\rangle + d|\downarrow\downarrow\rangle \tag{5}
$$

Operatorja S_{1x} in S_{2x} bomo izrazili z zniževalnim in zviševalnim operatorjem za spin. Zapišeta se takole:

$$
S_{\pm} = \frac{1}{2}\left[S_x \pm iS_y\right], \tag{6}
$$

kjer + označuje zviševalni operator, - pa zniževalnega. Izražava S_x in S_y se torej glasi:

$$
\begin{aligned}
S_x &= \frac{1}{2}\left[S_+ + S_-\right] \\
S_y &= \frac{1}{2i}\left[S_+ - S_-\right]
\end{aligned} \tag{7}
$$

Delovanje zniževalnega in zviševalnega operatorja podaja formula:

$$
S_{\pm}|sm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)} \quad |s, m\pm 1\rangle \tag{8}
$$

Najprej izračunamo stanja, ki jih dobimo, če z operatorjem S_{1x} delujemo na spinski del valovne funkcije za prvi delec, torej na stanja $|\uparrow_1\rangle$ in $|\downarrow_1\rangle$, ter z operatorjem S_{2y} na spinski del valovne funkcije za drugi delec, torej na stanja $|\uparrow_2\rangle$ in $|\downarrow_2\rangle$ (številka v indeksih se nanaša na delec). Imamo:

$$
\begin{aligned}
S_{1x}|\uparrow_1\rangle &= \frac{1}{2}\left[S_+ + S_-\right]|\uparrow_1\rangle = \frac{1}{2}S_-|\uparrow_1\rangle = \frac{1}{2}S_-\left|\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\right\rangle_1 = \\
&= \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)} \quad \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_1 = \\
&= \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} \quad \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_1 = \frac{\hbar}{2}\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_1 = \frac{\hbar}{2}|\downarrow_1\rangle
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{1x}|\downarrow_1\rangle &= \frac{1}{2}\left[S_+ + S_-\right]|\downarrow_1\rangle = \frac{1}{2}S_+|\downarrow_1\rangle = \frac{1}{2}S_+\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_1 = \\
&= \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} \quad \left|\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\right\rangle_1 = \frac{\hbar}{2}\left|\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\right\rangle_1 = \frac{\hbar}{2}|\uparrow_1\rangle
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{2y}|\uparrow_2\rangle &= \frac{1}{2i}\left[S_+ - S_-\right]|\uparrow_2\rangle = -\frac{1}{2i}S_-|\uparrow_2\rangle = \frac{i}{2}S_-\left|\frac{1}{2},\quad\frac{1}{2}\right\rangle_2 = \\
&= \frac{i\hbar}{2}\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}\quad\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_2 = \frac{i\hbar}{2}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_2 = \frac{i\hbar}{2}|\downarrow_2\rangle \qquad (11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{2y}|\downarrow_2\rangle &= \frac{1}{2i}\left[S_+ - S_-\right]|\downarrow_2\rangle = \frac{1}{2i}S_+|\downarrow_2\rangle = \frac{1}{2i}S_+\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_2 = \\
&= \frac{\hbar}{2i}\sqrt{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}}\quad\left|\frac{1}{2},\quad\frac{1}{2}\right\rangle_2 = \frac{\hbar}{2i}\left|\frac{1}{2},\quad\frac{1}{2}\right\rangle_2 = -\frac{i\hbar}{2}|\uparrow_2\rangle \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Sedaj lahko uporabimo začetne pogoje in dobimo začetno valovno funkcijo:

$$
\begin{aligned}
S_{1x}|\psi\rangle &= \frac{\hbar}{2}\left[a|\downarrow\uparrow\rangle + b|\downarrow\downarrow\rangle + c|\uparrow\uparrow\rangle + d|\uparrow\downarrow\rangle\right] = \frac{\hbar}{2}|\psi\rangle \qquad (13)\\
S_{2y}|\psi\rangle &= \frac{\hbar}{2}\left[ia|\uparrow\downarrow\rangle - ib|\uparrow\uparrow\rangle + ic|\downarrow\downarrow\rangle - id|\downarrow\uparrow\rangle\right] = \frac{\hbar}{2}|\psi\rangle \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Iz prve enačbe zgoraj sledi:

$$a = c; \qquad b = d, \qquad (15)$$

iz druge pa:

$$ia = b \qquad (16)$$

Sedaj lahko zapišemo valovno funkcijo $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = a\left[|\uparrow\uparrow\rangle + i|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + i|\downarrow\downarrow\rangle\right] \qquad (17)$$

Določiti je treba še konstanto a. To bomo naredili s pomočjo normalizacijskega pogoja $\langle\psi|\psi\rangle = 1$:

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle &= a^2\left[|\uparrow\uparrow\rangle - i|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - i|\downarrow\downarrow\rangle\right]\times\\
&\times\ \left[|\uparrow\uparrow\rangle + i|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + i|\downarrow\downarrow\rangle\right] = a^2[1+1+1+1] = 4a^2 = 1\\
&\Rightarrow\ a = \frac{1}{2} \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Sledi, da je iskana valovna funkcija ψ enaka:

$$\frac{1}{2}\left[|\uparrow\uparrow\rangle + i|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + i|\downarrow\downarrow\rangle\right] \qquad (19)$$

2.3 Verjetnost, da je ob meritvi skupni spin enak 0

Da ugotovimo, kolikšna je ta verjetnost moramo ravnokar dobljeno valovno funkcijo izraziti s stanji $|lm\rangle$. V predprejšnjem odseku sta zapisani obe bazi in zveze med njima. Stanji $|\uparrow\uparrow\rangle$ in $|\downarrow\downarrow\rangle$ sta ekvivalentni stanjima $|1,1\rangle$ in $|1,-1\rangle$, stanji $|\uparrow\downarrow\rangle$ in $|\downarrow\uparrow\rangle$ pa izrazimo s stanji $|1,0\rangle$ in $|0,0\rangle$ na sledeč način:

$$
\begin{aligned}
|\uparrow\downarrow\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[|1,0\rangle + |0,0\rangle\right]\\
|\downarrow\uparrow\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[|1,0\rangle - |0,0\rangle\right] \qquad (20)
\end{aligned}
$$

$|\psi\rangle$ se v bazi $|sm\rangle$ zapiše takole:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{1}{2}\left[|1,1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\left[|1,0\rangle + |0,0\rangle\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1,0\rangle - |0,0\rangle\right] - i|1,-1\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(i+1)|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)|0,0\rangle - i|1,-1\rangle\right]
\end{aligned} \tag{21}$$

Edino stanje za katerega velja, da je skupni spin enak 0, je stanje $|0,0\rangle$. Valovno funkcijo $|\psi\rangle$ imamo izraženo s stanji, ki imajo dobro določeno velikost skupnega spina; verjetnost, da bomo izmerili ravno stanje s skupnim spinom 0 je absolutni kvadrat koeficienta v razvoju $|\psi\rangle$ pred stanjem $|0,0\rangle$:

$$P(\text{skupni spin} = 0) = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}(i-1)\right|^2 = \frac{1}{8}|i-1|^2 = \frac{1}{4} \tag{22}$$