NALOGA

V prvem redu perturbacije obravnavaj prvo vzbujeno stanje vodikovega atoma, ki je hkrati v homogenem električnem polju $\mathbf{E} = E\hat{e_x}$ in v magnetnem polju, ki ga določa vektorski potencial $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$. Pri računu zanemari magnetni moment elektrona.

REŠITEV

Kadar imamo zunanje električno in magnetno polje se Hamiltonjan zapiše:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi - \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

S ϕ je označen zunanji električni potencial. V našem primeru velja $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$, pri čemer je $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Zgornji izraz se tako ob upoštevanju $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ prepiše v (glej izpeljavo pri predavanjih):

$$H = \frac{1}{2m}p^2 - \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r} - eEx - i\hbar\frac{eB}{2m}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{e^2B^2}{8m}\left(x^2 + y^2\right)$$

Zadji člen ($\propto B^2$) bomo v prvem redu perturbacije zanemarili. Tako nam ostane:

$$H = H_0 - eEx - i\hbar\frac{eB}{2m}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Ob upoštevanju $L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$ in pa $e = -e_0$ dobimo izraz za Hamiltonjan:

$$H = H_0 + e_0Ex - \frac{e_0B}{2m}L_z = H_0 + H'$$

Prvo vzbujeno stanje vodikovega atoma je $8\times$ degenerirano, vendar bomo zanemarili magnetni moment elektrona in nas torej projekcija spina na z os ne bo zanimala. Tako nam ostanejo 4 stanja, ki jih označimo z $|n, l, m_l>$ in to so:

$$|2,0,0>, |2,1,-1>, |2,1,0> \; in \, |2,1,1> \tag{1}$$

Izračunati moramo torej 16 matričnih elementov

$$< 2, l, m_l|H'|2, l', m_l' >=< 2, l, m_l|e_0Ex|2, l', m_l' > - < 2, l, m_l|\frac{e_0B}{2m}L_z|2, l', m_l' >$$

Hitro vidimo, da bo drugi člen matričnega elementa od 0 različen le v primeru, ko je $l = l'$ in $m_l = m_l' \neq 0$, saj velja $L_z|2, l', m_l' >= \hbar m_l'|2, l', m_l' >$. Ta člen bo torej tvoril samo diagonalne elemente.

Pri prvem členu pa upoštevamo, da je parnost operatorja $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$ enaka -1, parnost stanja $|2, l, m_l>$ pa je enaka $(-1)^l$. Če hočemo, da bo prvi člen v zgornjem matričnem elementu različen od 0, mora biti $l + l' + 1$ sodo število (oziroma $l + l'$ mora biti liho). Ta pogoj odpove pri $l = l'$. Preden iz zgornjih matričnih elementov zapišemo matriko, upoštevajmo še sledeče identitete:

$$< 2, l, m_l|\frac{e_0 B}{2m} L_z|2, l, m_l >= \frac{e_0 B\hbar}{2m} m_l = a m_l$$

$$< 2, 0, 0|e_0 E r \sin\vartheta \cos\varphi|2, 1, \pm 1 >= \pm\frac{3r_B}{\sqrt{2}} e_0 E = \pm b$$

$$< 2, 1, \pm 1|e_0 E r \sin\vartheta \cos\varphi|2, 0, 0 >= \pm\frac{3r_B}{\sqrt{2}} e_0 E = \pm b$$

$$< 2, 0, 0|e_0 E r \sin\vartheta \cos\varphi|2, 1, 0 >=< 2, 1, 0|e_0 E r \sin\vartheta \cos\varphi|2, 0, 0 >= 0$$

Vsi ostali elementi so po zgornjih trditvah enaki 0. Sedaj pa zložimo izračunane elemente v matriko (zapisano v bazi 1):

$$\begin{pmatrix} 0 & -b & 0 & b \\ -b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Poračunamo še lastne vrednosti in lastne vektorje:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{a^2 + 2b^2}$$

$$v_1 = \left(-\frac{a}{b}, 1, 0, 1\right)$$

$$v_2 = (0, 0, 1, 0)$$

$$v_{3,4} = \left(-\frac{a \mp \sqrt{a^2 + 2b^2}}{b}, -\frac{a^2 + b^2 \mp \sqrt{a^2 + 2b^2}}{b^2}, 0, 1\right)$$

Od tod vidimo, da se dvema stanjema energija v prvem redu perturbacije ne spremeni. To sta stanji:

$$|2, 1, 0> \text{ in}$$

$$A\left(-\frac{a}{b}|2, 0, 0> + |2, 1, -1> + |2, 1, 1>\right)$$

pri čemer je A normalizacijska konstanta. Energija se za $\sqrt{a^2+2b^2}$ poveča stanju:

$$A\left(-\frac{a-\sqrt{a^2+2b^2}}{b}|2,0,0> - \frac{a^2+b^2-\sqrt{a^2+2b^2}}{b^2}|2,1,-1> + |2,1,1>\right)$$

Za $\sqrt{a^2+2b^2}$ pa se energija zmanjša stanju:

$$A\left(-\frac{a+\sqrt{a^2+2b^2}}{b}|2,0,0> - \frac{a^2+b^2+\sqrt{a^2+2b^2}}{b^2}|2,1,-1> + |2,1,1>\right)$$