

DOMAČA NALOGA IZ KVANTNE MEHANIKE

Vladimir Radulović

vp. št. 28030220

1 Naloga

Za sistem dveh delcev s spinom $1/2$ velja:

$$\begin{aligned} S_{1x}|\Psi\rangle &= \frac{\hbar}{2}|\Psi\rangle \\ S_{2y}|\Psi\rangle &= \frac{\hbar}{2}|\Psi\rangle \end{aligned}$$

Kolikšna je verjetnost, da ob meritvi velikosti celotnega spina sistema delcev izmerimo vrednost 0?

2 Rešitev

Gornja pogoja lahko povemo bolj preprosto. En spin kaže v smer x , drugi pa v smer y . Glavna os kartezičnega koordinatnega sistema bo kot ponavadi os z . Stanja bomo ločevali glede na velikost skupnega spina in njegovo komponento v smer z .

2.1 Baza

Vsak izmed spinov je lahko glede na os z obrnjen gor ali dol. Za sistem dveh spinov so torej možna štiri produktna stanja:

$$|\uparrow\uparrow\rangle \quad |\uparrow\downarrow\rangle \quad |\downarrow\uparrow\rangle \quad |\downarrow\downarrow\rangle \quad (1)$$

Za ta stanja velja, da je njihova skupna z -komponenta spina kar vsota z -komponent spina za posamezna stanja:

$$\begin{aligned} S_z|\chi_1\chi_2\rangle &= [S_{1z} + S_{2z}]|\chi_1\chi_2\rangle = [S_{1z}|\chi_1\rangle]|\chi_2\rangle + |\chi_1\rangle[S_{2z}|\chi_2\rangle] = \\ &= [\hbar m_1|\chi_1\rangle]|\chi_2\rangle + |\chi_1\rangle[\hbar m_2|\chi_2\rangle] = \hbar[m_1 + m_2]|\chi_1\chi_2\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

V gornji enačbi sta χ_1 in χ_2 lahko \uparrow ali \downarrow , operator S_{1z} deluje le na spinski del valovne funkcije prvega delca, operator S_{2z} pa le na spinski del valovne funkcije drugega delca. Stanja, ki sestavljajo gornjo bazo imajo dobro določeno z -komponento spina. Da lahko problem rešimo, bomo potrebovali tudi bazo z dobro določeno velikostjo spina. Stanja, ki to bazo sestavljajo smo vajeni pisati kot $|sm\rangle$, kjer s nam poda velikost skupnega spina in m njegovo projekcijo v smer z . Za to bazo velja naslednje:

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 \\ s &= |s_1 - s_2|, |s_1 - s_2| + 1, \dots, |s_1 + s_2| \\ S_z|sm\rangle &= \hbar m|sm\rangle \\ S^2|sm\rangle &= \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

Povezava med produktnimi stanji in stanji v notaciji $|sm\rangle$ je sledeča:

$$\begin{aligned}
|1, 1\rangle &\leftrightarrow |\uparrow\uparrow\rangle \\
|1, 0\rangle &\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle] \\
|1, -1\rangle &\leftrightarrow |\downarrow\downarrow\rangle \\
|0, 0\rangle &\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle]
\end{aligned} \tag{4}$$

K temu se bomo vrnili kasneje.

2.2 Začetna valovna funkcija sistema

Iščemo splošno valovno funkcijo sistema dveh spinov $|\psi\rangle$. Določili jo bomo tako, da bomo zapisali njeno najbolj splošno obliko, oz. linearno kombinacijo baznih funkcij, nato pa upoštevali začetna pogoja za projekciji spinov. Nastavek za $|\psi\rangle$ je:

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\uparrow\downarrow\rangle + c|\downarrow\uparrow\rangle + d|\downarrow\downarrow\rangle \tag{5}$$

Operatorja S_{1x} in S_{2x} bomo izrazili z zniževalnim in zviševalnim operatorjem za spin. Zapišeta se takole:

$$S_{\pm} = [S_x \pm iS_y], \tag{6}$$

kjer $+$ označuje zviševalni operator, $-$ pa zniževalnega. Izražava S_x in S_y se torej glasi:

$$\begin{aligned}
S_x &= \frac{1}{2} [S_+ + S_-] \\
S_y &= \frac{1}{2i} [S_+ - S_-]
\end{aligned} \tag{7}$$

Delovanje zniževalnega in zviševalnega operatorja podaja formula:

$$S_{\pm}|sm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)} |s, m\pm 1\rangle \tag{8}$$

Najprej izračunamo stanja, ki jih dobimo, če z operatorjem S_{1x} delujemo na spinski del valovne funkcije za prvi delec, torej na stanja $|\uparrow_1\rangle$ in $|\downarrow_1\rangle$, ter z operatorjem S_{2y} na spinski del valovne funkcije za drugi delec, torej na stanja $|\uparrow_2\rangle$ in $|\downarrow_2\rangle$ (številka v indeksih se nanaša na delec). Imamo:

$$\begin{aligned}
S_{1x}|\uparrow_1\rangle &= \frac{1}{2} [S_+ + S_-]|\uparrow_1\rangle = \frac{1}{2} S_-|\uparrow_1\rangle = \frac{1}{2} S_- \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_1 = \\
&= \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 = \\
&= \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 = \frac{\hbar}{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 = \frac{\hbar}{2} |\downarrow_1\rangle
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
S_{1x}|\downarrow_1\rangle &= \frac{1}{2} [S_+ + S_-]|\downarrow_1\rangle = \frac{1}{2} S_+|\downarrow_1\rangle = \frac{1}{2} S_+ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 = \\
&= \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_1 = \frac{\hbar}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_1 = \frac{\hbar}{2} |\uparrow_1\rangle
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
S_{2y}|\uparrow_2\rangle &= \frac{1}{2i} [S_+ - S_-]|\uparrow_2\rangle = -\frac{1}{2i} S_-|\uparrow_2\rangle = \frac{i}{2} S_- \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_2 = \\
&= \frac{i\hbar}{2} \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_2 = \frac{i\hbar}{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_2 = \frac{i\hbar}{2} |\downarrow_2\rangle
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
S_{2y}|\downarrow_2\rangle &= \frac{1}{2i}[S_+ - S_-]|\downarrow_2\rangle = \frac{1}{2i}S_+|\downarrow_2\rangle = \frac{1}{2i}S_+\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_2 = \\
&= \frac{\hbar}{2i}\sqrt{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle_2 = \frac{\hbar}{2i}\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle_2 = -\frac{i\hbar}{2}|\uparrow_2\rangle
\end{aligned} \tag{12}$$

Sedaj lahko uporabimo začetne pogoje in dobimo začetno valovno funkcijo:

$$S_{1x}|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2}[a|\downarrow\uparrow\rangle + b|\downarrow\downarrow\rangle + c|\uparrow\uparrow\rangle + d|\uparrow\downarrow\rangle] = \frac{\hbar}{2}|\psi\rangle \tag{13}$$

$$S_{2y}|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2}[ia|\uparrow\downarrow\rangle - ib|\uparrow\uparrow\rangle + ic|\downarrow\downarrow\rangle - id|\downarrow\uparrow\rangle] = \frac{\hbar}{2}|\psi\rangle \tag{14}$$

Iz prve enačbe zgoraj sledi:

$$a = c; \quad b = d, \tag{15}$$

iz druge pa:

$$ia = b \tag{16}$$

Sedaj lahko zapišemo valovno funkcijo $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = a[|\uparrow\uparrow\rangle + i|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + i|\downarrow\downarrow\rangle] \tag{17}$$

Določiti je treba še konstanto a . To bomo naredili s pomočjo normalizacijskega pogoja $\langle\psi|\psi\rangle = 1$:

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle &= a^2[|\uparrow\uparrow\rangle - i|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - i|\downarrow\downarrow\rangle] \times \\
&\times [|\uparrow\uparrow\rangle + i|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + i|\downarrow\downarrow\rangle] = a^2[1 + 1 + 1 + 1] = 4a^2 = 1 \\
\Rightarrow a &= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{18}$$

Sledi, da je iskana valovna funkcija ψ enaka:

$$\frac{1}{2}[|\uparrow\uparrow\rangle + i|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + i|\downarrow\downarrow\rangle] \tag{19}$$

2.3 Verjetnost, da je ob meritvi skupni spin enak 0

Da ugotovimo, kolikšna je ta verjetnost moramo ravnokar dobljeno valovno funkcijo izraziti s stanji $|lm\rangle$. V predprejšnjem odseku sta zapisani obe bazi in zveze med njima. Stanji $|\uparrow\uparrow\rangle$ in $|\downarrow\downarrow\rangle$ sta ekvivalentni stanjima $|1, 1\rangle$ in $|1, -1\rangle$, stanji $|\uparrow\downarrow\rangle$ in $|\downarrow\uparrow\rangle$ pa izrazimo s stanji $|1, 0\rangle$ in $|0, 0\rangle$ na sledeč način:

$$\begin{aligned}
|\uparrow\downarrow\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}[|1, 0\rangle + |0, 0\rangle] \\
|\downarrow\uparrow\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}[|1, 0\rangle - |0, 0\rangle]
\end{aligned} \tag{20}$$

$|\psi\rangle$ se v bazi $|sm\rangle$ zapiše takole:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{1}{2}\left[|1, 1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}[|1, 0\rangle + |0, 0\rangle] + \frac{1}{\sqrt{2}}[|1, 0\rangle - |0, 0\rangle] - i|1, -1\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[|1, 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(i+1)|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)|0, 0\rangle - i|1, -1\rangle\right]
\end{aligned} \tag{21}$$

Edino stanje za katerega velja, da je skupni spin enak 0, je stanje $|0, 0\rangle$. Valovno funkcijo $|\psi\rangle$ imamo izraženo s stanji, ki imajo dobro določeno velikost skupnega spina; verjetnost, da bomo izmerili ravno stanje s skupnim spinom 0 je absolutni kvadrat koeficienta v razvoju $|\psi\rangle$ pred stanjem $|0, 0\rangle$:

$$P(\text{skupni spin} = 0) = \left| \frac{1}{2\sqrt{2}}(i - 1) \right|^2 = \frac{1}{8}|i - 1|^2 = \frac{1}{4} \quad (22)$$