1 Naloga

Obravnavaj enodimenzionalni harmonski oscilator s hamiltonianom

$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)x^2}{2}$, kjer je

$\omega(t) = \omega_0 + \delta\omega\cos(\Omega t)$ in $\delta\omega \ll \omega_0$.

Ob $t = 0$ je sistem v osnovnem stanju. V prvem redu perturbacije poišči verjetnosti, da se ob času t sistem nahaja v n-tem vzbujenem stanju.

2 Rešitev

Najprej razpišemo Hamiltonian s pomočjo zveze $\omega(t) = \omega_0 + \delta\omega\cos(\Omega t)$.

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{mx^2}{2}(\omega_0 + \delta\omega\cos(\Omega t))^2 \\
&= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + mx^2\omega_0\delta\omega\cos(\Omega t) + \frac{mx^2}{2}\delta\omega^2\cos^2(\Omega t) \\
&= H_0 + H'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H' &= mx^2\omega_0\delta\omega\cos(\Omega t) + \frac{mx^2}{2}\delta\omega^2\cos^2(\Omega t) \\
&= mx^2\omega_0\delta\omega\cos(\Omega t)
\end{aligned}
$$

kjer smo upoštevali, da je $\delta\omega \ll \omega_0$. Sistem je na začetku v lastnem stanju nezmotenega Hamiltoniana

$|m,t\rangle = e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}}|m\rangle = e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}}|m\rangle$,

kjer je m stanje pred motnjo, za naš primer osnovno stanje ($m = 0$). Verjetnost $c_n(t)$, da se sistem po motnji H' nahaja v n-tem vzbujenem stanju je:

$c_n(t) = c_n(t=0) - \frac{i}{\hbar}\int_0^t c_m(t')\langle n,t'|H'(t')|m,t'\rangle\, dt'$

$c_n(t = 0)$ je verjetnost, da se sistem na začetku nahaja v stanju $|m\rangle$. Za naš primer je $c_n(t=0)$ enak nič, saj se sistem na začetku nahaja v osnovnem stanju. Upoštevamo tudi, da je verjetnost $c_m(t)$, da se sistem na začetku nahaja v stanju m enaka ena. Tako dobimo zvezo

$$\begin{aligned}
c_n(t) &= -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \langle n,t'|H'(t')|m,t'\rangle\, dt' \\
&= -\frac{i}{\hbar} m\omega_0\delta\omega \int_0^t \langle n,t'|x^2\cos(\Omega t')|0,t'\rangle\, dt' \\
&= -\frac{i}{\hbar} m\omega_0\delta\omega\langle n|x^2|0\rangle \int_0^t \cos(\Omega t')\exp(\frac{it'(E_n-E_0)}{\hbar})dt'
\end{aligned}$$

Izraz $\langle n|x^2|0\rangle$ napišemo kot $\langle xn|x0\rangle$ in uporabimo zvezo

$x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a+a^+)$, kjer sta

$a|n\rangle = \sqrt{(n)}|n-1\rangle$ in $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$

anihilacijski in kreacijski operator, x_0 pa $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$. Tako dobimo izraza

$|xn\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle)$ in

$|x0\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}}|1\rangle$

Razvidno je, da je izraz $\langle xn|x0\rangle$ različen od nič le, če je n = 0 (osnovno stanje) ali n = 2 (drugo vzbujeno stanje). Ker iščemo verjetnost, da se sistem po motnji nahaja v vzbujenem stanju se bomo ukvarjali samo s primerom za n = 2. Takrat dobimo

$\langle xn|x0\rangle = \frac{x_0^2}{2}\sqrt{2}$

Rezultat vstavimo v enačbo za $c_n(t)$, upoštevamo, da je

$E_n - E_0 = \hbar\omega_0(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}) = 2\hbar\omega_0$

ter integriramo:

$$
\begin{aligned}
c_n(t) &= -\frac{i}{\hbar} m\omega_0 \delta\omega \frac{x_0^2}{2}\sqrt{2}\int_0^t e^{2it'\omega_0}\cos(\Omega t)\,dt' \\
&= -\frac{i\sqrt{2}\delta\omega m\omega_0 x_0^2(-2i\omega_0 + \exp(2i\omega_0 t)(2i\cos(\Omega t) + \Omega\sin(\Omega t)))}{2\hbar(\Omega^2 - 4\omega_0^2)}
\end{aligned}
$$

Verjetnost, da se sistem v času t nahaja v drugem vzbujenem stanju je

$P(t, n = 2) = |c_n(t)|^2$

$= \frac{\delta^2\omega m^2\omega_0^2 x_0^4}{2\hbar^2(\Omega^2-4\omega^2)^2}(4\omega_0^2 + 4\omega_0^2\cos^2(\Omega t) + \Omega^2\sin^2(\Omega t) - 4\omega_0^2\cos(\Omega t)(\exp(2i\omega_0 t) + \exp(-2i\omega_0 t)) + 2i\omega_0\Omega\sin(\Omega t)(\exp(2i\omega_0 t) - \exp(-2i\omega_0 t)))$

$= \frac{\delta^2\omega m^2\omega_0^2 x_0^4}{2\hbar^2(\Omega^2-4\omega^2)^2}(4\omega_0^2+4\omega_0^2\cos^2(\Omega t)+\Omega^2\sin^2(\Omega t)-8\omega_0^2\cos(\Omega t)\cos(2\omega_0 t)-4\omega_0\Omega\sin(\Omega t)\sin(2\omega_0 t))$