Aharonov-Bohmov pojav

Simon Jesenko

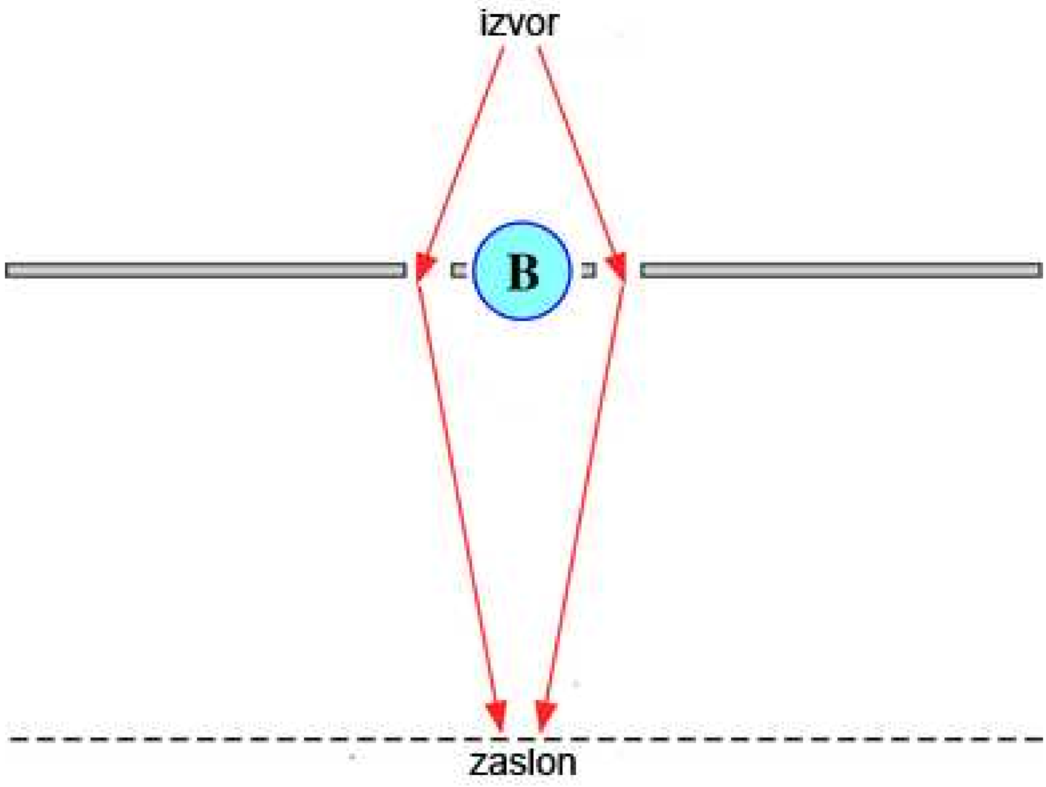
17.6.2007

1 Naloga

Obravnavaj Aharonov-Bohmov pojav pri interferenčnem poskusu z elektroni na dveh režah.

2 Uvod

Do Aharon-Bohmovega pojava pride pod vplivom vektorskega potenciala $\vec{A}$ na elektrone, ki potujejo skozi prostor. Pojav jasno kaže, da so v kvantni mehaniki relevantni vektorski potenciali, $\vec{A}$ in ϕ, ne pa jakosti polj $\vec{E}$ in $\vec{B}$, kot je to veljalo v klasični elektrodinamiki.



Slika 1: Skica eksperimentalne postavitve

Eksperimentalna postavitev je enaka kot za interferenčni pojav vpada snopa elektronov na dve reži, s tem da je med dvema režama postavljena "neskončno"dolga tuljava. Elektroni do notranjosti reže nimajo dostopa, zato niso izpostavljeni magnetnemu polju. Raziskujemo vpliv jakosti magnetnega polja v tuljavi na interferenčni vzorec na zaslonu.

Pojav obravnavamo s pomočjo "path integrala".

3 Rešitev

Verjetnost, da se delec, ki je bil ob času t_1 na mestu x_1 ob času t_2 nahaja na mestu x_2 je določena z integracijo po vseh poteh,

$$K(x_1, x_2, t_1, t_2) = \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]},$$

kjer je $S[x(t)]$ akcija za posamezno pot v času od t_1 do t_2,

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt.$$

Lagranžijan L je definiran tako kot v klasični mehaniki, in se s Hamiltonijanom izraža kot

$$L(\vec{r}, \vec{v}) = \vec{p} \cdot \vec{v} - H.$$

Zveza med hitrostjo in impulzom za delec v magnetnem polju se glasi

$$m\vec{v} = \vec{p} - e\vec{A},$$

Hamiltonijan pa

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + \overbrace{e\phi}^{V(x)}.$$

Če upoštevamo izraz za Lagranžijan ter zgornji zvezi, dobimo

$$\begin{aligned} L = \ & (m\vec{v} + e\vec{A})\vec{v} - \tfrac{mv^2}{2} - V = \\ & mv^2 + e\vec{A} \cdot \vec{v} - \tfrac{mv^2}{2} - V = \frac{mv^2}{2} + e\vec{A} \cdot \vec{v} - V \end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko L', zanima nas namreč samo odvisnost Lagranžijana od vektorskega potenciala - le ta je odvisen tega, skozi katero izmed rež se elektron giblje,

$$L' = L + e\vec{A} \cdot \vec{v}$$

Analogno postopamo tudi z akcijo,

$$S'[x(t)] = S + \int_{t_1}^{t_2} e\vec{A} \cdot v dt = S + \int_{x_1}^{x_2} e\vec{A} \cdot d\vec{s},$$

kjer smo integral po času pretvorili na integral od začetne do končne točke.

Propagator sedaj razdelimo na propagator po vseh poteh skozi eno režo in po vseh poteh skozi drugo režo,

$$K'(x_1, x_2, t_1, t_2) = K_1' + K_2' = \int_1 \left[\mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar}(S[x(t)] + \int_{x_1}^{x_2} e\vec{A} \cdot d\vec{s})} \right] + \int_2 \left[\mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar}(S[x(t)] + \int_{x_1}^{x_2} e\vec{A} \cdot d\vec{s})} \right].$$

Del path integalov, ki niso odvisni od A, pointegriramo v konstanti K_1 in K_2,

$$K'(x_1,x_2,t_1,t_2) = \quad e^{\int_{x_1}^{x_2} \frac{ie}{\hbar}\vec{A}\cdot d\vec{s_1}} K_1 + e^{\int_{x_1}^{x_2} \frac{ie}{\hbar}\vec{A}\cdot d\vec{s_2}} K_2 = $$
$$e^{\int_{x_1}^{x_2} \frac{ie}{\hbar}\vec{A}\cdot d\vec{s_1}} \left(K_1 + e^{(\int_{x_1}^{x_2} \vec{A}\cdot d\vec{s_2} - \int_{x_1}^{x_2} \vec{A}\cdot d\vec{s_2})\frac{ie}{\hbar}} K_2 \right)$$

V zgornjem integralu prepoznamo ravno integral vektorskega potenciala po zaključeni zanki, za kar pa po Stokesovem teoremu velja

$$\int_{x_1}^{x_2} \vec{A}\cdot d\vec{s_2} - \int_{x_1}^{x_2} \vec{A}\cdot d\vec{s_2} = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \phi_m,$$

torej pretok magnetnega polja skozi tuljavo. Konstanta $e^{\int_{x_1}^{x_2} \frac{ie}{\hbar}\vec{A}\cdot d\vec{s_1}}$ je po absolutni vrednosti enaka 1, zato na verjetnost prehoda ne vpljiva.

Verjetnost za prehod se izraža kot

$$P = |K|^2 = |K_1 + e^{\frac{ie}{\hbar}\phi_m} K_2|^2.$$

Če pišemo K_1 in K_2 v polarni obliki, $K_1 = |K_1|e^{i\varphi_1}$ in $K_2 = |K_2|e^{i\varphi_2}$, dobimo izraz

$$P = |K_1^2 + |K_2|^2 + 2|K_1||K_2|\cos(\frac{\phi_m e}{\hbar} + \phi_2 - \phi_1)$$

Faktorja φ_1 in φ_2 določata fazno razliko posameznih poti, in privedeta do interference, kot jo poznamu pri vpadu na reži brez tuljave. Zaradi vektorskega potenciala pa dobimo še dodatni člen, ki je odvisen od magnetnega pretoka skozi tuljavo. V odvisnosti od magnetnega pretoka se interferenčne proge premikajo po zaslonu. Interferenčna slika se ponovi za vsako spremembo magnetnega pretoke, ki je enaka

$$\Delta\phi_m = \frac{2\pi\hbar}{e}.$$

Morda velja še enkrat pripomniti, da sami elektroni ne interagirajo z magnetnim poljem v tuljavi, ampak pride do pojava izključno zaradi vektorskega potenciala zunaj tuljave.