Kvantna mehanika I

domača naloga: potencial δ funkcije

Milan Grkovski

Naloga:

-izračunaj amplitudi za prepustnost in odbojnost in nariši prepustnost v odvisnosti od energije delca

-določi energije in valovne funkcije vezanih stanj

-

izračunaj produkt nedoločenosti položaja in gibalne količine delca v osnovnem stanju

Potencial zapišemo v obliki

$$V(x) = -\lambda \delta(x)$$

1.izraz za prepustnost in odbojnost

nastavek za valovno funkcijo:

$$\psi_1(x) = e^{ikx} + r \cdot e^{-ikx} \quad \text{za } x<0$$

$$\psi_2(x) = te^{ikx} \quad \text{za } x>0$$

upoštevamo še robni pogoj:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0)$$

iz tega sledi

1 + r = t

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - \lambda\,\delta(x)\,\psi(x) = E\psi(x)$$

enačbo integriramo po majhnem intervalu okoli 0:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'\left(0_+\right) - \psi'(0_-)\right] - \lambda\,\psi(0) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[(1+r)\,ik - ik + rik\right] - \lambda\,(1+r) = 0$$

izrazimo r:

$$r\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,ik - \lambda\right] = \lambda$$

$$r = -\frac{1}{\left(ik\,\frac{\hbar^2}{m\lambda}\right) + 1}$$

$$t = 1 + r = \frac{1}{1 - i\left(\frac{m\lambda}{k\hbar^2}\right)}$$

Imamo torej izraza za prepustnost in odbojnost:

$$t = \frac{1}{1 - i\left(\frac{m\lambda}{k\hbar^2}\right)} = \frac{i\hbar^2 k}{\lambda\,m + i\hbar^2 k}$$

$$r = -\frac{1}{\left(ik\,\frac{\hbar^2}{m\lambda}\right) + 1}$$

upoštevamo

$$k_0 = \frac{\lambda\,m}{\hbar^2}$$

in tako poenostavimo izraza za r in t:

$$r = -\frac{1}{1 + \left(\frac{ik}{k_0}\right)}$$

$$t = \frac{ik}{k_0 + ik}$$

vpeljemo T:

$$T = |t|^2 = \left| \frac{ik}{k_0 + ik} \right|^2 = \frac{k^2}{k_0^2 + k^2}$$

(pri tem koraku smo izraz pomnožili s konjugirano vrednostjo)

upoštevamo

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

in izrazimo T:

$$T = \frac{2mE}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{\frac{\lambda^2 m^2}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{1}{\frac{\lambda^2 m}{2E} + 1}$$

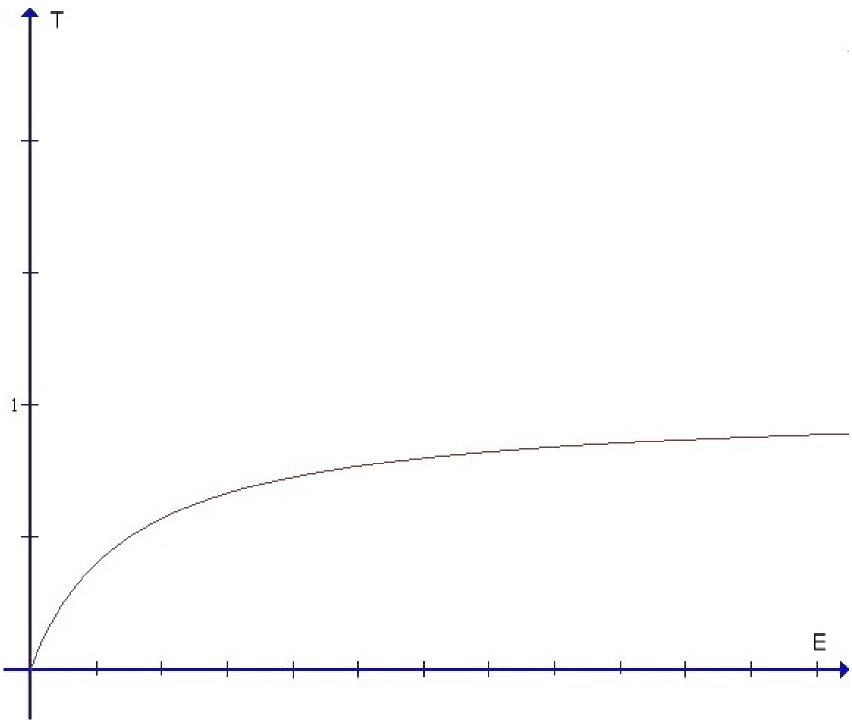
vpeljemo E_0:

$$E_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$$

in dobimo

$$T = \frac{E}{E_0 + E}$$

S temi podatki ni težko narisati grafa za T v odvisnosti od E – v neskončnosti gre proti 1:



2.Vezana stanja

Iz izraza

$$t = \frac{ik}{k_0 + ik}$$

vidimo, da je pol pri

$$k_0 = -ik$$
$$k = ik_0$$

Energija, ki temu ustreza, je

$$E = -\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$$

Dobimo samo 1 vezano stanje

Valovna funkcija vezanega stanja se zapiše kot

$$\psi(x) = \sqrt{k_0}\, e^{-k_0 |x|}$$

Zgornji izraz dobimo iz splošnega nastavka

$\psi(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$, kjer je x manjši od 0
in
$\psi(x) = Ce^{kx} + De^{-kx}$, kjer je x večji od 0

iz pogoja, da mora biti valovna funkcija takšna, da se da normirati, je B=C=0. Ostali konstanti in k pa določimo iz zahtev

- zveznost v točki 0 > iz tega sledi, da je A=C
- normalizacija:

torej je

$$A = \sqrt{k_0}$$

od koder dobimo

$$\psi(x) = \sqrt{k_0}\, e^{-k_0|x|}$$

3.Produkt nedoločenosti položaja in gibalne količine delca v osnovnem stanju

zapišimo valovno funkcijo

$$\psi(x) = \sqrt{k_0}\, e^{-k_0|x|}$$

Heisenbergov princip nedoločenosti nam pove, da je

$$\delta x \delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

a)nedoločenost položaja

$$\delta x = \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\langle x \rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, x \psi(x)\, dx = 0$$

to smemo reči zato, ker je produkt sode in lihe funkcije liha funkcija, katere integral po celotnem območju je 0.

(potencial je soda funkcija, torej so lastne funckije sode in lihe)

$$\left\langle x^2 \right\rangle = 2\int_0^{\infty} \psi^2(x)\, x^2\, dx = 2\int_0^{\infty} x^2 \sqrt{k_0}\, e^{-2k_0|x|}\, dx$$

$$= 2k_0 \int_0^{\infty} x^2 e^{-2k_0 x}\, dx$$

uvedemo substitucijo

$$2k_0 x = u$$
$$du = 2k_0\, dx$$

$$x^2 = \frac{u^2}{(2k_0)^2} \quad \text{in} \quad dx = \frac{du}{2k_0}$$

integral se preobrazi v

$$\frac{2k_0}{(2k_0)^3} \cdot \int_0^{\infty} u^2 e^{-u}\, du = \frac{1}{4k_0^2}\, 2! = \frac{1}{2k_0^2}$$

tu smo uporabili lastnost Γ funkcije

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

$$\Gamma(s+1) = s!$$

b)nedoločenost gibalne količine

$$\delta p = \sqrt{\left\langle p^2 \right\rangle - \langle p \rangle^2}$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi * \left(-(i\hbar) \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x)\, dx = 0$$

ker imamo spet integral lihe funkcije.

$$\left\langle p^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi * (x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi(x)\, dx$$

izračunamo drugi odvod valovne funkcije:

$$\frac{\partial^2}{(\partial x)^2} \cdot \left(\sqrt{k_0} \right) e^{-k_0 |x|} = \sqrt{k_0} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(k_0 e^{-k_0 |x|} sign(x) \right) = \sqrt{k_0} \left(k_0^2 e^{-k_0 |x|} sign^2(x) - k_0^2 e^{-k_0 |x|} 2\delta(x) \right)$$

pri čemer je sign(x) -1, če $x<0$ in 1, če $x \geq 0$. tako je

$$\left\langle p^2 \right\rangle = 2 \int_0^{\infty} k_0^3 \hbar^2 e^{-2k_0 |x|}\, dx + 2k_0^2 \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{2k_0 |x|} \delta(x) = k_0^2 \hbar^2$$

tako po $\delta p = \sqrt{\left\langle p^2 \right\rangle - \langle p \rangle^2}$ velja, da je $\delta p = \hbar k_0$

Produkt obeh nedoločenosti je torej $\frac{\hbar}{\sqrt{2}}$, kar je večje kot $\frac{\hbar}{2}$.

Sicer bi lahko kvadrat gibalne količine izračunali tudi po drugi poti z upoštevanjem zveze za kinetično energijo:

$$\langle T \rangle = \frac{\left\langle p^2 \right\rangle}{2m} = \langle H - V \rangle \mapsto \left\langle p^2 \right\rangle = 2m \left\langle (H - V) \right\rangle$$

$$\langle V \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \psi * (x)\, V(x)\, \psi(x) = -\lambda k_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, e^{-2k_0 |x|}\, dx = -\lambda k_0$$

Iz tega lahko dobimo z upoštevanjem že izračunane vezane energije $E_0 = -\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$ in zveze $k_0 = \frac{\lambda m}{\hbar^2}$ rešitev, ki smo jo dobili že prej:

$$\langle p^2 \rangle = \hbar^2 k_0^2$$