Vaje iz kvantne mehanike 1

Gregor Šmit

Ostre resonance pri sipanju na potencialni jami

OPOMBA: v računih sem vzel za h: $h = Planckova\,konstanta/2\pi$

Sprememba faze na valu ki gre skozi potencialni skok je 2π, saj pridobi vsakič ko prepotuje jamo po π. Tako sta val, ki gre skozi in val, ki se siplje, v fazi. Izračunali bomo prepustnost potencialne jame s potencialom V_0 in razmerje med širino in razmiki med resonancami. Računali bomo le v prvem redu. Iščemo ostre resonance t za:

$$x_0 = \sqrt{2\mathrm{mV_0}\frac{a^2}{h^2}} \gg 1 \quad ,$$

to pomeni, da je jama globoka ali široka.

$$t = \frac{e^{-ik_3 a}}{(cosx - \frac{i}{2}(\frac{(k_3 a)}{x} + \frac{x}{(k_3 a)})\,sinx)} = \frac{e^{-ik_3 a}}{(cosx - \frac{i}{2}(\frac{\sqrt{x^2 - x_0^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - x_0^2}})\,sinx)}$$

$$t = \frac{e^{-ik_3 a}}{((-1)^n - \frac{i}{2}(\frac{\sqrt{x^2 - x_0^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - x_0^2}})(-1)^n \varepsilon)}$$

Števca nismo izrazili z x, ker je prepustnost: $T = |t|^2$ nam $|e^{-ik_3 a}|^2$ da 1. Kjer smo upoštevali, da je v potencialni jami valovni vektor (valovno število)

$k_2 = \sqrt{2\mathrm{m}\frac{(E + V_0)}{h^2}}$ izven pa $k_3 = \sqrt{\frac{2\mathrm{mE}}{h^2}}$. E je energija lastnega stanja. $k_2 a = x$ je brezdimenzijska številka, ki je sorazmerna z energijo. V tretji enačbi za t je člen (-1)^n v imenovalcu prišel od razvoja sinusa in kosinusa v Taylorjevo vrsto.

$$(k_2 a)^2 - (k_3 a)^2 = x_0^2 = x^2 - (k_3 a)^2 \qquad k_3 a = \sqrt{x^2 - x_0^2}$$

in $x = n\pi + \varepsilon$, kjer je x malo večji od x_0 na robu jame. Gledamo blizu vrha resonanc, zato je ϵ majhen. Tako se

$\frac{(k_3 a)}{x} + \frac{x}{(k_3 a)}$ poenostavi v $(0 + \frac{(n\pi)}{\sqrt{x^2 - x_0^2}})$. Člen $k_3\frac{a}{x} = \frac{\sqrt{(x^2 - x_0{}^2)}}{x}$ smo lahko zanemarili, ker je x malo večji od x_0 in se skoraj odštejeta. Tako prevlada člen $\frac{x}{(k_3 a)}$.

Energija sistema je

$$E=\frac{((n\pi+\varepsilon)^2 h^2)}{2\mathrm{ma}^2}-V_0\simeq\frac{(n^2\pi^2+2\mathrm{n}\pi\varepsilon)}{(2\mathrm{ma}^2)}h^2-V_0=\frac{(n^2\pi^2 h^2-V_0 a^2 2\mathrm{m})}{2\mathrm{ma}^2}+\frac{(2\mathrm{n}\pi\varepsilon h^2)}{(2\mathrm{a}^2 m)}$$

$E=E_n+\frac{(2\mathrm{n}\pi\varepsilon h^2)}{(2\mathrm{a}^2 m)}$ odtod izrazimo ε: $\varepsilon=\frac{((E-E_n)am)}{(n\pi h^2)}$. Energijo n-tega lastnega stanja v neskončni potencialni jami smo označili z E_n .

Izračunamo še

$$n^2\pi^2-x_0^2=n^2\pi^2-\frac{(2\mathrm{mV}_0 a^2)}{h^2}=\frac{(2\mathrm{ma}^2)}{h^2}\left(\frac{(n^2\pi^2 h^2)}{(2\mathrm{ma}^2)}-V_0\right)=\frac{2\mathrm{ma}^2}{h^2}E_n \quad .$$

Enačba za t se tako prepiše v:

$$t=\frac{e^{-ik_3 a}}{\left((-1)^n-\frac{i}{2}\sqrt{\left(\frac{h^2}{(2\mathrm{mE}_n a^2)}\right)(-1)^n\frac{((E-E_n)am)}{h^2}}\right)} \quad .$$

Nato pa preoblikujemo enačbo v obliko

$$t=\frac{\left(\frac{i}{2}\Gamma_n(-1)^n e^{-ik_3 a}\right)}{\left((E-E_n)+\frac{i}{2}\Gamma_n\right)}$$, kjer je $$\Gamma_n=8\sqrt{\frac{(h^2 E_n)}{(2\mathrm{ma}^2)}} \quad .$$

Tako je prepustnost jame T enaka

$$T=|t|^2 \qquad T=\frac{\left(\frac{\Gamma_n}{2}\right)^2}{\left((E-E_n)^2+\left(\frac{\Gamma_n}{2}\right)^2\right)} \quad ,$$

v sledeči enačbi pa prepoznamo reasonančno krivuljo, kjer je Γ_n širina krivulje.

Razlika dveh zaporenih energij je

$E_{n+1}-E_n=\frac{((n+1)^2\pi^2 h^2)}{2\mathrm{ma}^2}-\frac{(n^2\pi^2 h^2)}{2\mathrm{ma}^2}\simeq\frac{(2\mathrm{n}\pi^2 h^2)}{2\mathrm{ma}^2}$. Tu smo E_{n+1} razvili le do linearnega člena. V izrazu $(n+1)^2-n^2$ smo lahko zanemarili 1, ker je n velik.

$$\Gamma_n = 8\sqrt{h^2 \frac{\frac{(n^2\pi^2 h^2 - V_0 2\mathrm{ma}^2)}{2\mathrm{ma}^2}}{2\mathrm{ma}^2}}\ ,$$

Energija vezanih stanj je odvisna od n. Tako smo dobili idejo, da zapišemo tudi potencial z n_0.

$V_0 \sim \frac{(h^2 n_0{}^2 \pi^2)}{(2\mathrm{ma}^2)}$. Blizu roba jame sta n_0 in n približno enaka. Tako dobimo:

$$\Gamma_n = \frac{8\mathrm{h}^2}{2\mathrm{ma}^2}\sqrt{(n^2 - n_0^2)} = \frac{4\mathrm{h}^2}{ma^2}\sqrt{((n+n_0)(n-n_0))} \simeq \frac{4\mathrm{h}^2}{ma^2}\sqrt{(2\mathrm{n}(n-n_0))}\ .$$

Razmerje med širino in razmiki med resonancami je :

$$\frac{\Gamma_n}{(E_{n+1}-E_n)} = \frac{8\mathrm{h}^2}{2\mathrm{ma}^2}\frac{\sqrt{(2\mathrm{n}(n-n_0))}}{(2\mathrm{n}_0 \pi^2 h^2)} 2\mathrm{ma}^2 = \sqrt{(2\frac{(n-n_0)}{n_0})}$$

. Resonance tik nad robom potencialne jame so ostrejše, kot resonance daleč nad robom potencialne jame.

Spodnji graf prikazuje točno prepustnost in resonančno krivuljo v odvistnosti od energije.