Domača naloga iz kvantne mehanike: Spin III
Luka Šantelj

1 Naloga

Za delca s spinoma 1 in 3 / 2

1. zapiši produktno bazo in
2. izračunaj Clebsch-Gordanove koeficiente za razvoj baznih funkcij z dobrim celotnim spinom in celotno z-komponento spina po produktni bazi.

Delec s spinom $S_1 = 1$ se giblje v potencialu delca s spinom $S_2 = 3/2$. Potencial, ki ga čuti, je odvisen od medsebojne orientacije spinov obeh delcev: $V(x) = -\lambda\delta(x)\vec{S_1} \cdot \vec{S_2}$. Določi energije in degeneracije vezanih stanj takega sistema.

2 Rešitev

2.1 Produktna baza

Zapišimo najprej bazne funkcije dveh ločenih delcev, enega s spinom $S_1 = 1$ in enega s spinom $S_2 = 3/2$.

S	bazne funkcije
1	$\|\,1\,\rangle, \|\,0\,\rangle, \|\,-1\,\rangle$
3/2	$\|\,3/2\,\rangle, \|\,1/2\,\rangle, \|\,-1/2\,\rangle, \|\,-3/2\,\rangle$

Kjer smo v ket pisali le projekcije spina m_s. Za sistem obeh delcev sestavimo produktno bazo, kjer so bazne funkcije vsi produkti omenjenih stanj. Tako imamo 12 baznih funkcij:

$$
\begin{array}{cccc}
|\,1, 3/2\,\rangle & |\,1, 1/2\,\rangle & |\,1, -1/2\,\rangle & |\,1, -3/2\,\rangle \\
|\,0, 3/2\,\rangle & |\,0, 1/2\,\rangle & |\,0, -1/2\,\rangle & |\,0, -3/2\,\rangle \\
|\,-1, 3/2\,\rangle & |\,-1, 1/2\,\rangle & |\,-1, -1/2\,\rangle & |\,-1, -3/2\,\rangle
\end{array}
$$

2.2 Clebsch-Gordanovi koeficienti

Sedaj bi radi zapisali razvoj baznih funkcij z dobrim celotnim spinom in celotno z-komponento spina po omenjenih produktnih baznih funkcijah.
Kot vemo so za sistem dveh delcev dovoljene velikosti spina (ekvivalentno vrtilnim količinam) enake $S = |S_1 - S_2|, \ldots, (S_1 + S_2)$. Tako imamo v našem primeru s spinoma 1 in 3/2 naslednje možnosti $S = 1/2, 3/2, 5/2$. Za celotno z-komponento spina velja očitno $m = m_1 + m_2$ in tako imamo spet 12 baznih funkcij, kar je tudi prav.

Bazne funkcije:

$$\begin{array}{llllll} |\,1/2,1/2\,\rangle & |\,1/2,-1/2\,\rangle & & & & \\ |\,5/2,-5/2\,\rangle & |\,5/2,-3/2\,\rangle & |\,5/2,-1/2\,\rangle & |\,5/2,1/2\,\rangle & |\,5/2,3/2\,\rangle & |\,5/2,5/2\,\rangle \\ |\,3/2,-3/2\,\rangle & |\,3/2,-1/2\,\rangle & |\,3/2,1/2\,\rangle & |\,3/2,3/2\,\rangle & & \end{array}$$

Kjer v ketu prvo število predstavlja velikost celotnega spina S in drugo velikost celotne projekcije m.
Dve zgornji bazni funkciji lahko na mah zapišemo v produktni bazi. To sta funkciji, katerih celotni spin 5/2 kaže v z smeri in kontra. Takrat sta seveda tudi oba spina obrnjena v z smer:

$$|\,\underbrace{5/2}_{S},\underbrace{5/2}_{m}\,\rangle = |\,\underbrace{1}_{m_1},\underbrace{3/2}_{m_2}\rangle \text{ in } |\,5/2,-5/2\,\rangle = |\,-1,-3/2\,\rangle$$

Sedaj ko poznamo razvoj dveh baznih funkcij si lahko pomagamo z operatorjem S_-, ki nam zmanjša velikost projekcije spina za 1. Delujmo z njim na funkcijo $|\,5/2,5/2\,\rangle$:

$$S_-|\,5/2,5/2\,\rangle = \hbar\sqrt{S(S+1)-m(m-1)}\,|\,5/2,3/2\,\rangle = \sqrt{5}\,\hbar\,|\,5/2,3/2\,\rangle$$

Seveda velja $S_- = S_{1-} + S_{2-}$, ker $\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2}$. Funkcijo $|\,5/2,3/2\rangle$ v produktni bazi dobimo torej tako, da z operatorjem S_- delujemo na funkcijo $|\,5/2,5/2\rangle$ zapisano v produktni bazi, $|\,1,3/2\,\rangle$. Upoštevamo, da operator S_{1-} deluje le na projekcijo spina prvega delca in S_{2-} le na drugega, pa dobimo:

$$S_-|\,1,3/2\,\rangle = (S_{1-} + S_{2-})|\,1,3/2\,\rangle = \hbar\,\sqrt{2}|\,0,3/2\,\rangle + \hbar\,\sqrt{3}|\,1,1/2\,\rangle$$

Kot vidimo iz prejšnje enačbe, moramo dobljeni rezultat še deliti z $\hbar\sqrt{5}$ in imamo iskano funkcijo v produktni bazi:

$$|\,5/2,3/2\,\rangle = \sqrt{2/5}|\,0,3/2\,\rangle + \sqrt{3/5}|\,1,1/2\,\rangle$$

Ostale tri funkcije z $S = 5/2$ bi izračunali po enakem postopku, za $|\,5/2,1/2\,\rangle$ bi delovali z S_- na pravkar dobljeni rezulat.
Nadalje lahko izračunamo razvoj funkcije $|\,3/2,3/2\,\rangle$. Vemo, da mora biti linearna kombinacija funkcij $|\,1,1/2\,\rangle$ in $|\,0,3/2\,\rangle$, saj imata le ti dve funkciji vsoto projekcij enako 3/2. Ob upoštevanju pogoja, da mora biti rezultat ortogonalen na razvoj $|\,5/2,3/2\,\rangle$ zlahka pridemo do:

$$|\,3/2,3/2\,\rangle = \sqrt{3/5}|\,0,3/2\,\rangle - \sqrt{2/5}|\,1,1/2\,\rangle$$

Ponovno bi lahko ostale 3 funkcije poiskali s pomočjo operatorja S_-.
Na podoben način bi poiskali še razvoj dveh funkcij z velikostjo spina $S = 1/2$. V praksi se seveda zgornjega zamudnega postopka ne uporablja in se razvoj dobi iz tabel Clebsch-Gordanovih koeficientov.

2.3 Gibanje v potencialu

Poglejmo si energije in degenericjo vezanih stanj sistema dveh delcev z omenjenima spinoma. Hamiltonjan sistema zapišemo kot:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \lambda\delta(x)\,\vec{S_1}\cdot\vec{S_2}\,,\ \ \lambda > 0$$

Skalarni produkt v hamiltonjanu lahko izrazimo s pomočjo operatorjev velikosti spinov kot:

$$S^2 = (\vec{S_1}+\vec{S_2})^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\,\vec{S_1}\cdot\vec{S_2} \Rightarrow \vec{S_1}\cdot\vec{S_2} = \frac{1}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2)$$

Valovno funkcijo sestavljata produkt krajevnega $|\,\psi\,\rangle$ in spinskega dela $|\,S\,m\,S_1\,S_2\,\rangle$. Spinski del zapišemo v bazi katere dobri števili sta celotni spin in njegova projekcija, saj so to hkrati tudi dobre funkcije operatorjev velikosti posameznega spina. Delujmo zdaj na valovno funkcijo z H. Upoštevamo še, da kinetični del H-ja in delta potenciala delujeta le na $|\,\psi\,\rangle$, spinski del potenciala pa le na $|\,S\,m\,S_1\,S_2\,\rangle$. Dobimo:

$$H|\,\psi\,\rangle|\,S\,m\,S_1\,S_2\,\rangle = \frac{p^2}{2m}|\,\psi\,\rangle|\,S\,m\,S_1\,S_2\,\rangle + (-\lambda\delta(x)\tfrac{1}{2})|\,\psi\,\rangle(S^2 - S_1^2 - S_2^2)|\,S\,m\,S_1\,S_2\,\rangle$$

$$(\hat{S}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2)|\,S\,m\,S_1\,S_2\,\rangle = \underbrace{(S(S+1)\hbar^2 - S_1(S_1+1)\hbar^2 - S_2(S_2+1)\hbar^2)}_{2\tilde{\lambda}/\lambda}|\,S\,m\,S_1\,S_2\,\rangle$$

S strešicami smo dodatno poudarili, da gre za operatorje, v drugem delu pa za števila. Zapišemo torej:

$$H|\,\psi\,\rangle|\,S\,m\,S_1\,S_2\,\rangle = (\tfrac{p^2}{2m} - \tilde{\lambda}\delta(x))|\,\psi\,\rangle|\,S\,m\,S_1\,S_2\,\rangle$$

Operatorja v oklepaju delujeta le na $|\,\psi\,\rangle$ in od sedaj naprej je reševanje problema povsem ekvivalentno problemu, ki smo ga reševali že v nalogi Delta potencial. Vemo torej, da imamo vezana stanja v primeru ko je $\tilde{\lambda} > 0$. Vstavimo naše podatke, $S_1 = 1$ in $S_2 = 3/2$, v izraz za $\tilde{\lambda}$:

$$S = 1/2 \ \Rightarrow\ \tilde{\lambda} = -\tfrac{5}{2}\lambda\hbar^2$$
$$S = 3/2 \ \Rightarrow\ \tilde{\lambda} = -\lambda\hbar^2$$
$$S = 5/2 \ \Rightarrow\ \tilde{\lambda} = \tfrac{3}{2}\lambda\hbar^2$$

Vezana stanja imamo le v primeru,ko je $S = 5/2$. To stanje 6x degenerirano, ker imamo 6 različnih projekcij spina, ki v enačbah ne nastopajo. Energija teh stanj je:

$$E_0 = -\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \quad \text{kjer je}\ ,\ \ k_0 = \frac{\tilde{\lambda}m}{\hbar^2}$$

Izpeljavo si lahko pogledate v omenjeni nalogi.