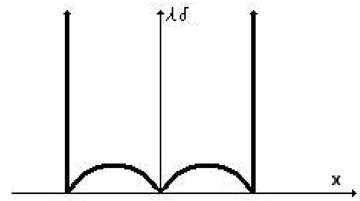
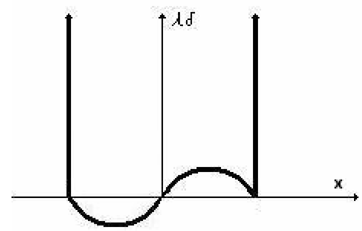
Na predhodnjih vajah (12.3.2007) smo že izračunali lastne funkcije za neskončno potencialno jamo z delta (λδ) potencialom. Za rešitev smo dobili sodo ($|+\rangle$) in liho ($|-\rangle$) valovno funkcijo.Grafični prikaz lahko vidimo na slikah 1 in 2.



Slika 1:Soda valovna funkcija.

Izračunali smo, da je energija lihega stanja $E_{liho} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$, energija sodega pa malo nižja $E_{sodo} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2} - \frac{8\pi^2\hbar^2}{ma^2 x_0}$, kjer je m masa delca, a širina jame in $x_0 = \frac{ma\lambda}{\hbar^2}$.



Slika 2: Liha valovna funkcija

Do časa t = 0 imamo $\lambda = \infty$ in delec v levi strani jame. Ob t = 0 znižamo $\lambda < \infty$. Poglejmo si v kakšnem stanju je ob nadalnjih časih.

Funkcijo ob času t = 0 razvijemo po lastnih funkcijah, kar splošno zapišemo

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n \Psi_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \quad .$$

V našem primeru to pomeni,

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) + o(\frac{1}{x_0}) \quad (1)$$

za funkcijo, ki opisuje delec v levi polovici jame in

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) + o(\frac{1}{x_0}) \quad (2)$$

za delec v desni polovici pa, kjer smo naredili napako reda $1/x_0$. Ker smo predpostavili, da imamo na začetku delec samo v levi polovici je $|\Psi,0\rangle = |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$. Naredimo časovni razvoj

$$|\Psi,t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle e^{-i\frac{E_{soda}}{\hbar}t} - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle e^{-i\frac{E_{liha}}{\hbar}t}\ ) \quad (3) .$$

Energijo lihega stanja definirajmo enako nič ($E_{liho} = 0$) in energijo sodega stanja $E_{sodo} = \Delta E = -\frac{8\pi^2\hbar^2}{ma^2 x_0}$. Tako nam v enačbi (3) ostane

$$|\Psi,t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad (4) \ .$$

Če v enačbah (1) in (2) zanemarimo ostanek in ju enkrat odštejemo in drugič seštejemo dobimo

$$|+\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|L\rangle + |D\rangle) \quad (5)$$

$$|-\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|D\rangle - |L\rangle) \quad (6).$$

Enačbi (5) in (6) vstavimo v enačbo (3),

$$|\Psi, t\rangle = \frac{1}{2}(|L\rangle + |D\rangle)e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} - \frac{1}{2}(|D\rangle - |L\rangle) \quad (7)$$

Izpostavimo stanji $|L\rangle$ in $|D\rangle$,

$$|\Psi, t\rangle = \frac{1}{2}|L\rangle(1 + e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t}) + \frac{1}{2}|D\rangle(e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} - 1) \quad (8)$$

Izpostavimo $e^{-i\frac{\Delta E}{2\hbar}t}$

$$|\Psi, t\rangle = |L\rangle e^{-i\frac{\Delta E}{2\hbar}t}\frac{1}{2}(e^{i\frac{\Delta E}{2\hbar}t} + e^{-i\frac{\Delta E}{2\hbar}t}) + |D\rangle e^{-i\frac{\Delta E}{2\hbar}t}\frac{1}{2}(e^{-i\frac{\Delta E}{2\hbar}t} - e^{i\frac{\Delta E}{2\hbar}t}) \quad (9)$$

Po definiciji $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ in $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ dobimo

$$|\Psi, t\rangle = |L, t\rangle = |L\rangle e^{-i\frac{\Delta E}{2\hbar}t}\cos(\frac{\Delta E}{2\hbar}t) - |D\rangle e^{-i\frac{\Delta E}{2\hbar}t} i\sin(\frac{\Delta E}{2\hbar}t) \quad (10)$$

Po istem postopku dobimo za funkcijo v desni polovici

$$|D, t\rangle = |D\rangle e^{-i\frac{\Delta E}{2\hbar}t}\cos(\frac{\Delta E}{2\hbar}t) - |L\rangle e^{-i\frac{\Delta E}{2\hbar}t} i\sin(\frac{\Delta E}{2\hbar}t) \quad (11)$$

Faktor $e^{-i\frac{\Delta E}{2\hbar}t}$ lahko izpustimo, saj ne nastopa pri opazljivkah. Tako dobimo

$$|L, t\rangle = |L\rangle\cos(\frac{\Delta E}{2\hbar}t) - |D\rangle i\sin(\frac{\Delta E}{2\hbar}t) \quad (12)$$

$$|D, t\rangle = |D\rangle\cos(\frac{\Delta E}{2\hbar}t) - |L\rangle i\sin(\frac{\Delta E}{2\hbar}t) \quad (13)$$

Verjetnost, da najdemo delec v levi polovici bi lahko izračunali klasično

$$\int_{-a/2}^{0} \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx = ...$$

Ampak mi si bomo pomagali z projekcijskimi operatorji $\hat{P}_n$, za katere velja $\hat{P}_n \hat{P}_m = \delta_{nm}\hat{P}_n = \begin{cases} \hat{P}_n; m = n \\ 0; sicer \end{cases}$ in $\sum_n \hat{P}_n = \hat{I}$. Z njihovo pomočjo lahko definiramo verjetnost, da najdemo delec v stanju n, kot $p_n = \langle \Psi | \hat{P}_n | \Psi \rangle$ in stanje v katerem se nahaja delec po meritvi, kot $\dfrac{\hat{P}_n |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | \hat{P}_n | \Psi \rangle}}$. Projekcijska operatorja za levo polovico in desno sta $P_L = |L\rangle\langle L|$ in $P_D = |D\rangle\langle D|$.

Preverimo lastnost $\hat{P}_n \hat{P}_m = \delta_{nm}\hat{P}_n$,

$$\hat{P}_L \hat{P}_D = |L\rangle\langle L|D\rangle\langle L| = 0,$$

ker sta stanji ortogaonalni, velja $\langle L|D\rangle = 0$ in tako je zgornji produkt enak nič.

$$\hat{P}_L \hat{P}_L = |L\rangle\langle L|L\rangle\langle L| = P_L$$

in ker velja $\langle L|L\rangle = 1$ dobimo $\hat{P}_L \hat{P}_L = |L\rangle\langle L| = P_L$.

Sedaj dokažimo še trditev $\sum_n \hat{P}_n = I$, kjer je I identiteta. Tega se lotimo tako, da definiramo neko splošno valovno funkcijo $|\psi\rangle = c_1|L\rangle + c_2|D\rangle$. Delujmo nanjo z $\hat{P}_L + \hat{P}_D$. Spomnimo se še, da velja $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$,

$$\begin{aligned}
(|L\rangle\langle L| + |D\rangle\langle D|)|\psi\rangle &= (|L\rangle\langle L| + |D\rangle\langle D|)(c_1|L\rangle + c_2|D\rangle) = \\
&= |L\rangle\langle L|(c_1|L\rangle + c_2|D\rangle) + |D\rangle\langle D|(c_1|L\rangle + c_2|D\rangle) = \\
&= c_1|L\rangle\langle L|L\rangle + c_1|L\rangle\langle L|D\rangle + c_2|D\rangle\langle D|L\rangle + c_2|D\rangle\langle D|D\rangle = \\
&= c_1|L\rangle + c_2|D\rangle = |\psi\rangle = I|\psi\rangle
\end{aligned}$$

Sedaj izračunajmo, kakšna je verjtnost, da se delec nahaja v levi polovici jame.

$$p_L = \langle L,t\,|\,\hat{P}_L\,|\,L,t\rangle$$

Vstavimo enačbo 12 in projekcijski operator in se še spomnimo, da pri spremembi KET-a v BRA, moramo člen hermitsko adjungirati.

$$p_L = \left(\langle L|\cos(\frac{\Delta E}{2\hbar}t) - \langle D|i\sin(\frac{\Delta E}{2\hbar}t)\right)|L\rangle\langle L|\left(|L\rangle\cos(\frac{\Delta E}{2\hbar}t) + |D\rangle i\sin(\frac{\Delta E}{2\hbar}t)\right) \quad (14)$$

Vemo, da sta stanji $|L\rangle$ in $|D\rangle$ ortogonalni in zaradi tega nam ostane za verjetnost samo

$$p_L = \cos^2(\frac{\Delta E}{2\hbar}t) \quad (15)$$

Imamo neskončno potencialno jamo, verjetnost, da najdemo delec v jami mora biti enaka 1.

$$.\ p_L + p_D = 1$$

$$\Rightarrow \quad p_D = \sin^2\left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right) \quad (16)$$

Poglejmo si v kakšnem stanju je delec po meritvi, če izmerimo, da je bil ob času meritve v stanju $|L\rangle$.

$$|\Psi\rangle \to \frac{\hat{P}_n|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|\hat{P}_n|\Psi\rangle}} = \frac{|L\rangle\cos(\frac{\Delta E}{2\hbar}t)}{\cos\ (\frac{\Delta E}{2\hbar}t)} = |L\rangle$$

Vidimo, da je po meritvi delec še vedno v levi polovici jame.

Če vzamemo čas $t \ll \tau = \frac{2\hbar}{\Delta E}$, lahko razvijemo verjetnosti (15) in (16) v Taylorjevo vrsto do kvadratnega člena, $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ in $\sin x \approx x$

$$p_L = \cos^2\left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right) \approx 1 - \left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right)^2 \quad (16)$$

$$p_D = \sin^2\left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right) \approx \left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right)^2 \quad (17)$$

Pogledamo ob času 2t, kakšne je verjetnost za stanje $|L\rangle$

$$p_L' \approx \left[1 - \left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right)^4 \approx 1 - 2\left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right)^2 \quad (18)$$

Kjer nam prvi člen predstavlja verjetnost, da je bil delec v stanju $|L\rangle$, drugi člen pa da je bil delec v stanju $|D\rangle$ in je prešel v stanje $|L\rangle$. Verjetnost, da najdemo delec v stanju $|D\rangle$ ob času 2t pa je

$$p_D' \approx \left[1 - \left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right)^2\right]\left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right)^2 + \left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right)^2\left[1 - \left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right)^2\right] \approx 2\left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right)^2 \quad (19)$$

Meritev ponovimo n-krat, vedno ob vsakem večkratniku t-ja. Za verjetnosti dobimo

$$p_L^{(n)} \approx 1 - n\left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right)^2 \quad (20)$$

$$p_D^{(n)} \approx n\left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right)^2 \quad (21)$$

Vse te meritve opravimo v času T=nt, sledi

$$p_L^{(n)} \approx 1 - \frac{\Delta E^2}{4\hbar^2}\frac{T^2}{n} \quad (22)$$

$$p_D^{(n)} \approx \frac{\Delta E^2}{4\hbar^2}\frac{T^2}{n} \quad (23)$$

Če pri konstantnem času T naredimo zelo veliko število meritev, recimo neskončno mnogo, dobimo za verjetnosti

$$p_L^{(\infty)} \approx \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\Delta E^2}{4\hbar^2}\frac{T^2}{n}\right) = 1 \quad (24)$$

$$p_D^{(\infty)} \approx \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Delta E^2}{4\hbar^2}\frac{T^2}{n}\right) = 0 \quad (25)$$

Vidimo, da delec pri dovolj veliki gostoti meritev, ostane v stanju izmerjenim na začetku.