Gašper Štifter
28010074

Delec v magnetnem polju

Delec se giblje v tanki plasti pod vplivom potenciala

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 y^2$$

in homogenega magnetnega polja, pravokotnega na ravnino plasti, $\vec{B} = B\hat{e}_z$.
Uporabimo Landauovo umeritev:

$$\nabla . \vec{A} = 0$$
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -By & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kjer lahko uporabimo nastavek za ψ:

$$\psi(x, y) = e^{ik_x x} \varphi(y)$$

Stacionarna Schroedingerjeva enačba ima obliko:

$$\left(\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla + e_0\vec{A} \right)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 y^2 \right)\psi =$$
$$\left(\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + i2\hbar e_0 By \frac{\partial}{\partial x} + e_0^2 B^2 y^2 \right) + \frac{1}{2} m\omega_0^2 y^2 \right)\psi = E\psi$$

Z nastavkom za ψ reduciramo problem na iskanje rešitve za φ:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' + \frac{1}{2m}\left(\hbar^2 k_x^2 - 2\hbar e_0 B k_x y + \left(e_0^2 B^2 + m^2\omega_0^2 \right) y^2 \right)\varphi = E\varphi$$

pišimo:

$$\omega^2 = \frac{\left(e_0^2 B^2 + m^2\omega_0^2 \right)}{m^2}$$
$$b = \frac{\hbar e_0 B k_x}{\left(e_0^2 B^2 + m^2\omega_0^2 \right)}$$

in prepišimo enačbo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''+\frac{m\omega^2}{2}(y-b)^2\varphi=\left(E+\frac{m\omega^2 b^2}{2}-\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}\right)\varphi$$

oziroma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''+\frac{m\omega^2}{2}\tilde{y}^2\varphi=\varepsilon\varphi$$

kjer smo pisali $\tilde{y}=y-b$ in $\varepsilon=E+\frac{m\omega^2 b^2}{2}-\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}$. Za ε poznamo rešitve:

$$\varepsilon_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

ali

$$E_n=\hbar\sqrt{\omega_c^2+\omega_0^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}\left(1-\frac{\omega_c^2}{(\omega_c^2+\omega_0^2)}\right)$$

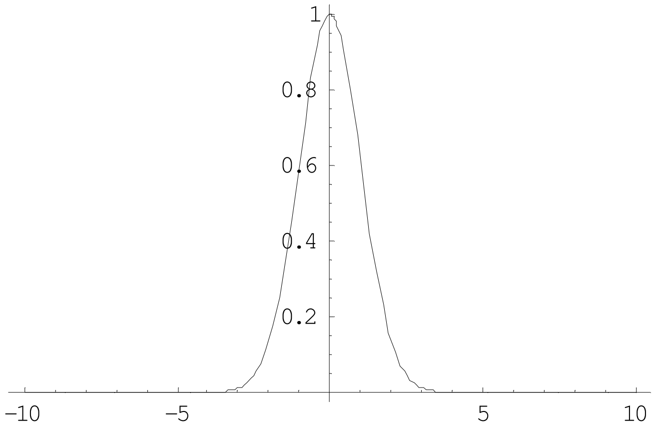
Vpeljali smo ciklotronsko frekvenco $\omega_c=\frac{e_0 B}{m}$.
Zapišimo še ustrezne valovne funkcije:

$$\psi_n(x,y)=Ae^{ik_x x-\frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{y_0}\right)^2}H_n\left(\frac{y-b}{y_0}\right)$$

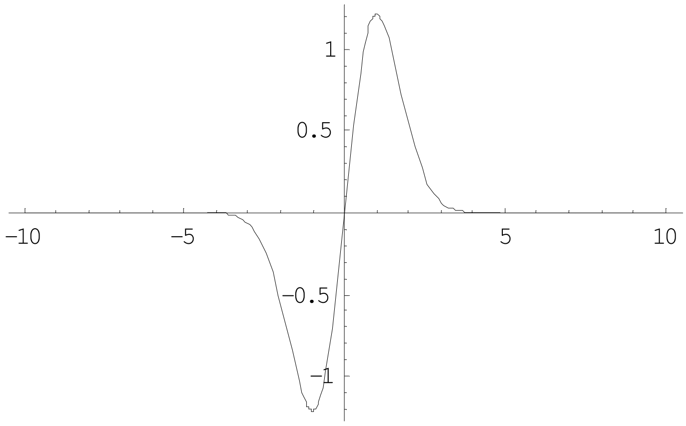
$$y_0=\sqrt{\frac{\hbar}{m\sqrt{\omega_c^2+\omega_0^2}}}$$

H_n je n-ti Hermitov polinom in A je normalizacijska konstanta.

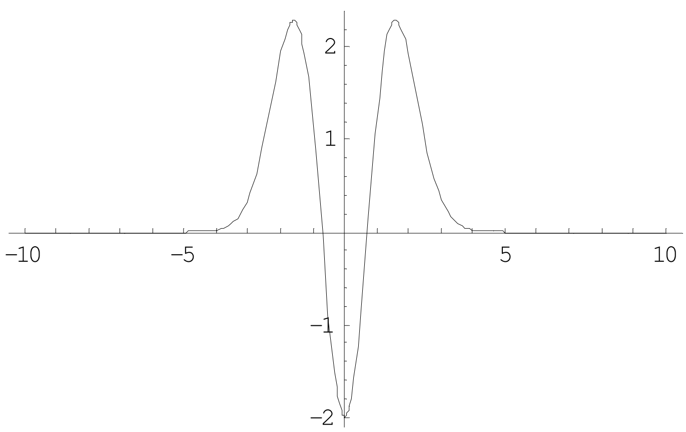
Nekaj primerov narisanih lastnih funkcij sistema:
N=0



N=1

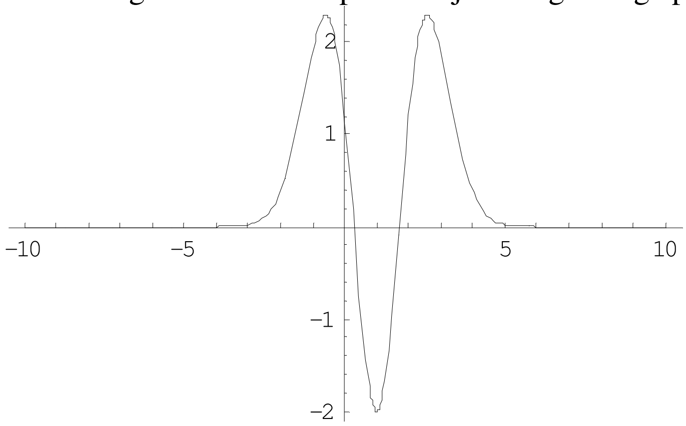


N=2



Grafi so sicer narisani za primer, ko ni magnetnega polja, ko se magnetno polje pojavi, se graf samo malo premakne v smer abscise, stvar je očitna iz same oblike valovne funkcije, informacija o magnetnem polje je vsebovana v parametru b:

Zadeva izgleda za n=2 z upoštevanjem magnetnega polja nekako takole:



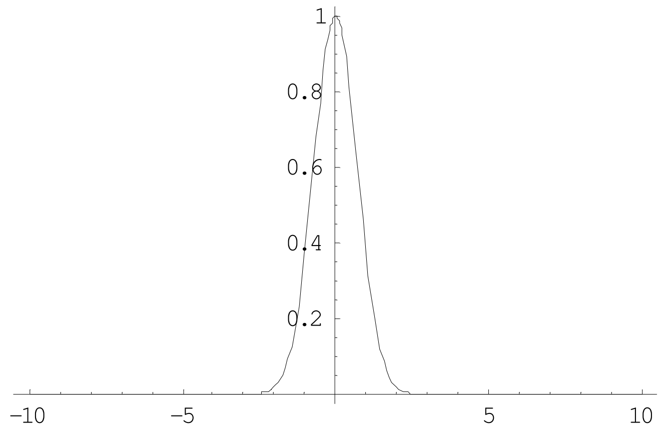
Izračunajmo še gostoto električnega toka:

Verjetnostna gostota je

$$\rho = \psi^* \psi$$

Za n=0, če ni polja

$$\rho = konst * e^{-y^2}$$



Če je polje je zadeva le malo premaknjena iz izhodišča.

Gostota verjetnostnega toka je:

$$j = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right)$$

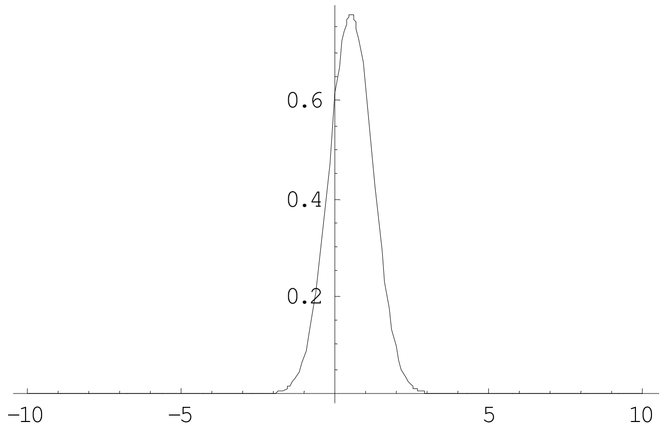
Gostota električnega toka pa je sorazmerna z gostoto verjetnostnega toka

Za lastno stanje sem si izbral zaradi enostavnosti lastne funkcije kar stanje z n=0

$$\psi_0(x,y) = Ae^{ik_x x - \frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{y_0}\right)^2}$$

potem pa je :

$$\vec{j} = \frac{\hbar A^2}{m}\left(e^{-\left(\frac{y-b}{y_0}\right)^2} k_x, 0\right)$$



Verjetnostni tok je narisan, ko je polje vključeno, ko je polje izključeno, je graf simetričen na ordinato.

Gostoto električnega toka izgleda enako kot verjetnostni tok, le da je v konstanti pred izrazom skrit še naboj elektrona.

Literatura:

Ashcroft: Solid state physics

Schwabl: Quantum mechanics