Naloga iz Kvantne mehanike 1

Poiščimo lastna stanja za dani hamiltonjan H = εJ_x^2:

$$J_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ (<- samo za primerjavo)

$$J_x^2 = J_x \cdot J_x = \hbar^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

To so operatorji za J_x , J_z , J_x^2 v sistemu l_z. Poiskati moramo lastne vrednosti in lastne vektorje tretjega operatorja. To bodo ravno lastna stanja za dani H izražena z l_z.
1. lastna vrednost je 1 in lastni vektor (0, 1, 0), to je 0(l_z = 1) + 1(l_z = 0) + 0(l_z = -1)
2. lastna vrednost je 1 in lastni vektor (1/√2, 0, 1/√2)
3. lastna vrednost je 0 in lastni vektor (-1/√2, 0, 1/√2)
Očitno sta dve energiji degenerirani:

$$E_{1,2} = \varepsilon\, \hbar^2 \qquad E_3 = 0$$

Za časovni razvoj napišemo lastne funkcije in jih pomnožimo z exp(-i2πEt/h)

$$\psi(t) = a\, \langle 0 \rangle\, e^{-i\varepsilon\hbar t} + b\, \frac{1}{\sqrt{2}}\, (\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle)\, e^{-i\varepsilon\hbar t} + c\, \frac{1}{\sqrt{2}}\, (-\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle)$$

Zanima nas ψ(0) = <1>. To bomo dosegli z ustrezno izbiro konstant a, b, c. Očitno a = 0, za b in c pa nam ostane sistem dveh enačb z dvema neznankama. Dobimo b = - c = √2/2. Atom bo prišel v stanje l_z = -1, ko bo exponent enako -1. Z drugimi besedami povedano, ko bo držalo 2πEt/h = π.

$$t = \frac{\pi}{\varepsilon\, \hbar} \quad .$$