Dvonivojski sistem s periodičnim vzbujanjem

Dvonivojski sistem izmenično periodično vzbujamo s Hamiltonovima operatorjema, ki se v bazi $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ zapišeta kot $\langle\psi_i|\hat{H}_1|\psi_j\rangle = (-1)^i E_0\,\delta_{ij}$ ter $\langle\psi_i|\hat{H}_2|\psi_j\rangle = E_0(1-\delta_{ij})$. Znotraj ene periode t_0 najprej čas $t_0/2$ deluje $\hat{H}_1$, nato pa enako dolg čas $\hat{H}_2$. Poišči stanja, ki se po eni periodi ne spremenijo.
Kolikšni pa morajo biti parametri sistema, da se katerokoli stanje po eni periodi ne spremeni?

Matriki za Hamiltonova operatorja $\hat{H}_1$ in $\hat{H}_2$ v bazi $|\psi_1\rangle$ in $|\psi_2\rangle$ zapišemo kot

$$M_1 = \begin{bmatrix} -E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & E_0 \\ E_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če začnemo v stanju $c_1\,|\psi_1\rangle + c_2\,|\psi_2\rangle$ in delujemo $t_0/2$ časa s prvim ter enako časa z drugim operatorjem, to lahko zapišemo kot

$$\exp\left(-\tfrac{i}{\hbar}\cdot\tfrac{t_0}{2}M_2\right)\cdot\exp\left(-\tfrac{i}{\hbar}\cdot\tfrac{t_0}{2}M_1\right)\cdot\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Matrika M_1 je v dani bazi že diagonalna, za matriko M_2 pa moramo najprej poiskati lastne vrednosti in lastne vektorje:

$$\det\left(M_2 - \lambda I\right) = \begin{bmatrix} -\lambda & E_0 \\ E_0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - E_0^2 = (\lambda - E_0)(\lambda + E_0) = 0$$

$$\lambda_1 = E_0,\ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = -E_0,\ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

To pomeni, da lahko lastni funkciji drugega operatorja zapišemo kot

$$|\psi_1'\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle\Big)$$
$$|\psi_2'\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle\Big)$$

Matriko M_2 diagonaliziramo kot $M_2 = UDU^T$, kjer je U unitarna matrika z lastnimi vektorji matrike M_2 po stolpcih in D diagonalna matrika s pripadajočimi lastnimi vrednostmi:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & E_0 \\ E_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & -E_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Eksponente prepišimo v matrično obliko:

$$\exp\left(-\tfrac{i}{\hbar}\cdot\tfrac{t_0}{2}M_1\right)=\begin{bmatrix} e^{iE_ot/2\hbar} & 0 \\ 0 & e^{-iE_ot/2\hbar}\end{bmatrix}$$

$$\exp\left(-\tfrac{i}{\hbar}\cdot\tfrac{t_0}{2}M_2\right)=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-iE_ot/2\hbar} & 0 \\ 0 & e^{iE_ot/2\hbar}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

in ponovno zapišimo celotno stanje po delovanju obeh Hamiltonk:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-iE_ot_0/2\hbar} & 0 \\ 0 & e^{iE_ot_0/2\hbar}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{iE_ot_0/2\hbar} & 0 \\ 0 & e^{-iE_ot_0/2\hbar}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2\end{bmatrix}$$

Zaradi preglednosti uvedemo substitucijo $\alpha = e^{iE_0t_0/2\hbar}$ in prepišemo zmnožek matrik, ki deluje na prvotno funkcijo:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\alpha & \frac{1}{\alpha}-1 \\ 1-\alpha & \frac{1}{\alpha}+1\end{bmatrix}=A$$

Po eni periodi bodo ostala nespremenjena tista stanja, za katera bo veljalo

$$A\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2\end{bmatrix}=e^{i\phi}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2\end{bmatrix}$$

(t.j. enaka absolutna vrednost koeficientov c_1 in c_2; smemo si privoščiti zamik faze), torej iščemo lastne vektorje matrike A. Za lastne vrednosti dobimo

$$\lambda^2-\frac{\lambda}{2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+1=\lambda^2-2\lambda\cos\left(E_0t_0/\hbar\right)^2+1=0,$$

kar rešimo za dane parametre.
Potrebni pogoj, da se nobeno stanje po delovanju Hamiltonk ne spremeni, je, da A ne sme imeti izvendiagonalnih elementov, torej mora biti $\alpha = 1$ oz. $E_0t_0/\hbar = 2n\pi$, kar je tudi zadostni pogoj (dobimo enotsko matriko).