Tomaž Čendak

Periodično vzbujani harmonski oscilator

Delec v harmonskem potencialu s frekvenco ω se nahaja v osnovnem stanju. Ob času $t = 0$ vklopimo izmenično električno polje, ki prispeva dodatni potencial $V_1(x) = F_0 x sin(\omega' t)$. Pokaži, da delec za vse čase ostane v koherentnem stanju in izračunaj, kako se s časom spreminja parameter koherentnega stanja. Kaj se zgodi za $\omega = \omega'$?

Rešitev:

Hamiltonka našega sistema je sestavljena iz dveh delov - hamiltonke običajnega harmonskega oscilatorja in dodatnega člena zaradi potenciala V_1:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + F_0 x sin(\omega' t).$$

Lahko jo zapišemo tudi takole:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x + \frac{F_0 sin(\omega' t)}{m\omega^2})^2 - \frac{F_0^2 sin^2(\omega' t)}{2m\omega^2}.$$

Uporabnejši je zapis z uporabo kreacijskega in anihilacijskega operatorja:

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + F_0 sin(\omega' t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a).$$

Prvi člen je hamiltonka običajnega harmonskega oscilatorja zapisana z operatorjema a in $a^\dagger$. Drugi člen je potencial V_1, kjer smo operator x zapisali kot:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a).$$

Da bo v prihodnje manj pisanja definirajmo še funkcijo $f(t)$:

$$f(t) = F_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} sin(\omega' t) = \Gamma sin(\omega' t).$$

Hamiltonka ima sedaj obliko:

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + f(t)(a^\dagger + a).$$

Poglejmo si delovanje operatorjev a in $a^\dagger$ na koherentno stanje $|\alpha\rangle$:

$$a\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle\,.$$

Rezultat je trivialen, saj so stanja $|\alpha\rangle$ lastne funkcije operatorja a.
Zapišimo razvoj stanja $|\alpha\rangle$ po lastnih funkcijah harmonskega oscilatorja in vrsto odvajajmo po parametru koherentnega stanja (α):

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= \sum_{n=0} \frac{\alpha^n (a^\dagger)^n}{n!}\,|0\rangle\,,\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\,|\alpha\rangle &= \sum_{n=0} n\frac{\alpha^{n-1}(a^\dagger)^n}{n!}\,|0\rangle\\
&= a^\dagger \sum_{n=1} \frac{\alpha^{n-1}(a^\dagger)^{n-1}}{(n-1)!}\,|0\rangle\\
&= a^\dagger \sum_{n=0} \frac{\alpha^{n}(a^\dagger)^{n}}{n!}\,|0\rangle\,,\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\,|\alpha\rangle &= a^\dagger\,|\alpha\rangle\,.
\end{aligned}$$

Delovanje operatorja $a^\dagger$ je enakovredno odvajanju po parametru koherentnega stanja (α).
Stanje našega delca bomo opisali z valovno funkcijo $|\Psi\rangle$:

$$|\Psi\rangle = |\alpha\rangle\, e^{-i\varphi(t)}.$$

Predpostavili smo, da bo delec za vse čase v koherentnem stanju. Spreminjala se bo le faza φ. Stanje $|\Psi\rangle$ vstavimo v Schrodingerjevo enačbo in upoštevamo lastnosti operatorjev a in $a^\dagger$:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi\rangle &= H\,|\Psi\rangle\,,\\
\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi\rangle &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\,|\alpha\rangle\, e^{-i\varphi(t)} + |\alpha\rangle\,\frac{\partial}{\partial t}e^{-i\varphi(t)}\\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha}\dot\alpha\,|\alpha\rangle\, e^{-i\varphi(t)} + |\alpha\rangle\,(-i)\dot\varphi e^{-i\varphi(t)},\\
H\,|\alpha\rangle &= \hbar\omega\left[\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\,|\alpha\rangle + \frac{1}{2}\,|\alpha\rangle\right] + f(t)\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\,|\alpha\rangle + \alpha\,|\alpha\rangle\right],\\
i\hbar\left[\dot\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\,|\alpha\rangle - i\dot\varphi\,|\alpha\rangle\right] &= \hbar\omega\left[\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\,|\alpha\rangle + \frac{1}{2}\,|\alpha\rangle\right] + f(t)\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\,|\alpha\rangle + \alpha\,|\alpha\rangle\right].
\end{aligned}$$

V zadnji enačbi smo upoštevali, da se faktor $e^{-i\varphi(t)}$ pojavi v vseh členih in ga lahko "krajšamo". Omenjeno enačbo prepišimo v tole obliko:

$$\left[\frac{1}{2}\hbar\omega + \alpha f(t) - \hbar\dot\varphi\right]|\alpha\rangle = \left[i\hbar\dot\alpha - \hbar\omega\alpha - f(t)\right]\frac{\partial}{\partial\alpha}\,|\alpha\rangle\,.$$

$|\alpha\rangle$ in $\frac{\partial}{\partial\alpha}|\alpha\rangle$ sta vektorja v L_2 prostoru. Enačbi zadostimo, če sta koeficienta pred vektorjema enaka nič:

$$i\hbar\dot{\alpha} - \hbar\omega\alpha - f(t) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\hbar\omega + \alpha f(t) - \hbar\dot{\varphi} = 0. \tag{2}$$

Časovno odvisnost parametra α podaja enačba (1). Enačba (2) povezuje parameter α in fazo φ.
Zanimajo nas rešitve enačbe (1). α zapišimo kot $\alpha = a + ib$ in uporabimo definicijo funkcije $f(t)$:

$$i\hbar(\dot{a} + i\dot{b}) - \hbar\omega(a + ib) - \Gamma sin(\omega' t) = 0.$$

Enačbo ločimo na realni in imaginarni del:

$$0 = -\hbar\dot{b} - \hbar\omega a - \Gamma sin(\omega' t), \tag{3}$$

$$0 = \hbar\dot{a} - \hbar\omega b \tag{4}$$

Enačbo (4) še enkrat odvajajmo, izrazimo $\dot{b}$ in ga vstavimo v enačbo (3):

$$\ddot{a} + \omega^2 a = -\frac{\Gamma\omega}{\hbar} sin(\omega' t). \tag{5}$$

Celotna rešitev enačbe (5) je sestavljena iz homogene in partikularne rešitve. Homogena rešitev reši enačbo:

$$\ddot{a} + \omega^2 a = 0, \tag{6}$$

partikularna pa zadosti enačbi:

$$\ddot{a} + \omega^2 a = -\frac{\Gamma\omega}{\hbar} sin(\omega' t). \tag{7}$$

Rešitvi sta očitni:

$$\begin{aligned} a_{hom} &= Asin(\omega t) + Bcos(\omega t), \\ a_{par} &= Csin(\omega' t). \end{aligned}$$

Koeficient C določimo, če a_{par} vstavimo v enačbo (7):

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{par} + \omega^2 a_{par} &= -\frac{\Gamma\omega}{\hbar} sin(\omega' t), \\ C(-\omega'^2 + \omega^2) sin(\omega' t) &= -\frac{\Gamma\omega}{\hbar} sin(\omega' t), \\ C &= \frac{\Gamma\omega}{\hbar(\omega'^2 - \omega^2)}. \end{aligned}$$

Koeficienta A in B določimo iz začetnega pogoja. Delec je ob $t = 0$ v osnovnem stanju harmonskega oscilatorja ($\alpha(t = 0) = 0$):

$$\begin{aligned}
\alpha(t = 0) &= 0 \rightarrow a(t = 0) = 0, b(t = 0) = 0, \\
a(t = 0) &= 0 \rightarrow B = 0, \\
a &= Asin(\omega t) + \frac{\Gamma\omega}{\hbar(\omega'^2 - \omega^2)} sin(\omega' t), \\
b &= \frac{1}{\omega}\dot{a} = Acos(\omega t) + \frac{\Gamma\omega}{\hbar(\omega'^2 - \omega^2)} \frac{\omega'}{\omega} cos(\omega' t), \\
b(t = 0) &= 0 \rightarrow A = -\frac{\Gamma\omega}{\hbar(\omega'^2 - \omega^2)} \frac{\omega'}{\omega}, \\
a &= \frac{\Gamma\omega}{\hbar(\omega'^2 - \omega^2)} (sin(\omega' t) - \frac{\omega'}{\omega} sin(\omega t)), \\
b &= \frac{\Gamma\omega}{\hbar(\omega'^2 - \omega^2)} \frac{\omega'}{\omega} (cos(\omega' t) - cos(\omega t)).
\end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $\alpha = a + ib$:

$$\alpha = \frac{\Gamma\omega}{\hbar(\omega'^2 - \omega^2)} \left[sin(\omega' t) - \frac{\omega'}{\omega} sin(\omega t) + i\frac{\omega'}{\omega}(cos(\omega' t) - cos(\omega t)) \right]$$

Opazimo, da tako realna kot imaginarna komponenta parametra α divergirata, ko je $\omega = \omega'$. Pojav je analogen resonančnemu odzivu nihala, ki ga vzbujamo z frekvenco, ki je enaka lastni frekvenci nihala.