Periodično vzbujeni harmonski oscilator

Štefan Krek

20. april 2006

1 Naloga:

Delec v harmonskem potencialu s frekvenco ω se nahaja v osnovnem stanju. Ob času $t = 0$ vklopimo izmenično električno polje, ki prispeva dodatni potencial $V_1(x) = F_0 x \sin(\omega' t)$. Pokaži, da delec za vse čase ostane v koherentnem stanju in izračunaj, kako se s časom spreminja parameter koherentnega stanja. Kaj se zgodi pri $\omega' = \omega$.

2 Rešitev:

Hamiltonjan koherentnega stanja za harmonski oscilator je oblike:

$$H_1 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x \tag{1}$$

V primeru, da vklopimo dodatno polje pa dobimo hamiltonovo funkcijo oblike:

$$H_2 = H_1 + V_1(x) \qquad V_1(x) = F_0 x \sin(\omega' t) \tag{2}$$

Hamiltonovo funkcijo lahko zapišemo s pomočjo kreciskega in anihilacijskega operatorja tako:

$$H_2 = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + \underbrace{F_0 \sin(\omega' t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}}_{f(t)}(a^\dagger + a), \tag{3}$$

pri čemer smo zapisali koordiato x z operatorjema $a^\dagger$ in a.

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a)$$

Schrödinger-jeva enacba se zapiše:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle. \tag{4}$$

Zgornjo Hamiltonovo funkcijo vztavimo v Schrödinger-jevo enačbo in uporabimo nastavek:

$$|\psi\rangle = |\alpha\rangle e^{-i\phi(t)},$$

kjer je $|\alpha\rangle$ vektor, ki opisuje koherentno stanje, ki je definirano:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \qquad |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(a^\dagger)^n}{n!}|0\rangle. \tag{5}$$

Torej leva stran Schrödinger-jeve enacbe se glasi:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(|\alpha(t)\rangle e^{-i\phi(t)}\right) = i\hbar\left(e^{-i\phi}\frac{\partial}{\partial t}|\alpha\rangle - i\dot{\phi}|\alpha\rangle e^{-i\phi}\right)$$

Oglejmo si sedaj člen, ki nastopa v zgornji enačbi:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\alpha\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(a^\dagger)^n}{n!}|0\rangle\right) \tag{6}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\right)}_{*}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(a^\dagger)^n}{n!}|0\rangle + \underbrace{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(a^\dagger)^n}{n!}|0\rangle\right)}_{\#} \tag{7}$$

Pri členu oznacenem z # lahko nadomestimo odvod po času z odvodom po α. Tako dobimo za člen # tako:

$$e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(a^\dagger)^n}{n!}|0\rangle\right)\dot{\alpha} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n}\frac{na^\dagger\alpha^{n-1}(a^\dagger)^{n-1}}{n(n-1)!}|0\rangle\dot{\alpha} \tag{8}$$

$$= a^\dagger|\alpha\rangle\dot{\alpha} \tag{9}$$

Člen označen z $(*)$ pa dobimo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{\alpha\alpha^*}{2}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\right) \tag{10}$$

$$= -ue^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\dot{u} - ve^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\dot{v} \tag{11}$$

$$= -e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}(u\dot{u}+v\dot{v}), \tag{12}$$

kjer smo uvedli:$\alpha = u + iv$.

Torej lahko zapišemo časovni odvod koherentnega stanja:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\alpha\rangle = (u\dot{u} + v\dot{v})|\alpha\rangle + a^\dagger|\alpha\rangle\dot{\alpha} \tag{13}$$

Oglejmo si še desno stran Schrödinger-jeve enacbe:

$$\begin{aligned} H|\psi\rangle &= |\alpha\rangle e^{-i\phi} && (14) \\ &= \left(\hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + f(t)(a^\dagger + a)\right)|\alpha\rangle && (15) \\ &= \hbar\omega(a^\dagger a|\alpha\rangle + \frac{1}{2}|\alpha\rangle) + f(t)(a^\dagger|\alpha\rangle + a|\alpha\rangle) && (16) \\ &= \hbar\omega(a^\dagger\alpha|\alpha\rangle + \frac{1}{2}|\alpha\rangle) + f(t)(a^\dagger|\alpha\rangle + \alpha|\alpha\rangle) && (17) \end{aligned}$$

Sedaj lahko zapišemo celotno Schrödinger-jevo enacbo:

$$i\hbar(u\dot{u}+v\dot{v})|\alpha\rangle+a^\dagger|\alpha\rangle\dot{\alpha}-i\dot{\phi}|\alpha\rangle = \hbar\omega(a^\dagger\alpha|\alpha\rangle+\frac{1}{2}|\alpha\rangle)+f(t)(a^\dagger|\alpha\rangle+\alpha|\alpha\rangle) \tag{18}$$

Na desni in levi strani imamo dva prispevka in sicer $\alpha|\alpha\rangle$ in $a^\dagger|\alpha\rangle$. Oba prispevka sta neodvisna, zato mora biti vsota koeficientov pred vsakim enaka 0. Dobimo sistem dveh enačb:

$$\begin{aligned} \hbar\omega\alpha + f(t) - \dot{\alpha}i\hbar &= 0 && (19) \\ \frac{1}{2}\hbar\omega + f(t)\alpha - i\hbar(u\dot{u} + v\dot{v}) - \hbar\dot{\phi} &= 0 && (20) \end{aligned}$$

Enačba (19) predstavlja amplitudni del, enačba (20) pa fazni del. Sedaj vstavimo namesto $f(t)$, kar smo definirali pri enačbi (3). Ker nas zanima amplituda v odvisnosti od vsiljene frekvence rešujemo enačbo (19).

$$\begin{aligned} \hbar\omega\alpha + F_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sin(\omega' t) - i\dot{\alpha}\hbar &= 0; \qquad \kappa = F_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} && (21) \\ i\omega\dot{\alpha} + \omega\alpha &= \kappa\sin(\omega' t) && (22) \end{aligned}$$

Rešitev homogenega dela enačbe je:

$$\alpha = \alpha_0 e^{-i\omega t}$$

Partikularna rešitev: Reševali bomo bolj splošen primer, tako da namesto sinusa zapišemo eksponentno funkcijo:

$$i\omega\dot{\alpha} + \omega\alpha = Ae^{i\omega'' t}$$

Nastavek: $\bar{\alpha}_{par} = De^{i\omega'' t}$ nesemo v zgornjo enacbo in dobimo:

$$A = D(\omega'' - \omega)$$

Partikularna resitev za sinusno vzbujanje pa izgleda tako pri upoštevanju naslednje zveze:

$$\kappa \sin(\omega' t) = \frac{\kappa}{2i}\left(e^{i\omega' t} - e^{-i\omega' t}\right)$$

$$\alpha_{par} = \frac{\kappa}{2i}\left(\frac{1}{\omega' + \omega}e^{i\omega' t} - \frac{1}{-\omega' + \omega}e^{-i\omega' t}\right)$$

Splošna rešitev pa se glasi:

$$\alpha = \alpha_0 e^{-i\omega t} + \frac{\kappa}{2i}\left(\frac{1}{\omega' + \omega}e^{i\omega' t} - \frac{1}{-\omega' + \omega}e^{-i\omega' t}\right) \tag{23}$$

Poglejmo si še, kako se spreminja amplituda v odvisnosti od vsiljene frekvence pri začetnem pogoju:

$$\alpha(t = 0) = 0$$

$$\alpha_0 = \frac{\kappa}{i}\frac{\omega'}{\omega^2 - \omega'^2}$$