Vaje iz Kvantne mehanike I
Zaporedje Stern-Gerlachovih poskusov

Miha Mihovilovič

May 11, 2005

1 Naloga

Delec s spinom 1/2 spustimo skozi Stern-Gerlachov poskus in se omejimo le na enega od curkov. Nato tak curek spustimo skozi serijo n Stern-Gerlachovih naprav, kjer je vsaka od naprav zasukana za kot $\phi = \pi/(2n)$ glede na prejšnjo. Vsaka naslednja naprava prestreza tisti curek iz prejšnje naprave, ki ima večjo verjetnost. S kolikšno verjetnostjo delec, ki vstopa v serijo S-G naprav, izhaja skozi obe možni poti iz zadnje S-G naprave?

2 Rešitev

Imejmo bazo χ_+, χ, kjer χ_+ predstavlja lastno stanje s spinom gor in χ_- predstavlja lastno stanje s spinom dol. Delcu, ki je šel skozi prvi S-G poskus lahko pripišemo valovno funkcijo, ki jo razvijemo po baznih vektorjih spina $|\chi_+>$ in $|\chi_->$ kot

$$|\psi>= c_1|\chi_+> + c_2|\chi_-> \tag{1}$$

Mi se v naši nalogi odločimo, da bomo na naslednji S-G aparat peljali le curek, v katerem imajo delci spin $\uparrow$. S tem smo stanje našega delca določili. Delec, ki prileti na naslednji S-G poskus ima potem valovno funkcijo kar enako

$$|\psi>= |\chi_+> \tag{2}$$

Sedaj delec spustimo skozi drug S-G poskus, ki je glede na prvega zamaknjen za kot θ. Stanje delca $|\psi>$, ki pride skozi drug S-G apatrat lahko razvijemo po lastnih stanjih za novo smer χ'_+ in χ'_- kot

$$|\psi>= c'_1|\chi'_+> + c'_2|\chi'_-> \tag{3}$$

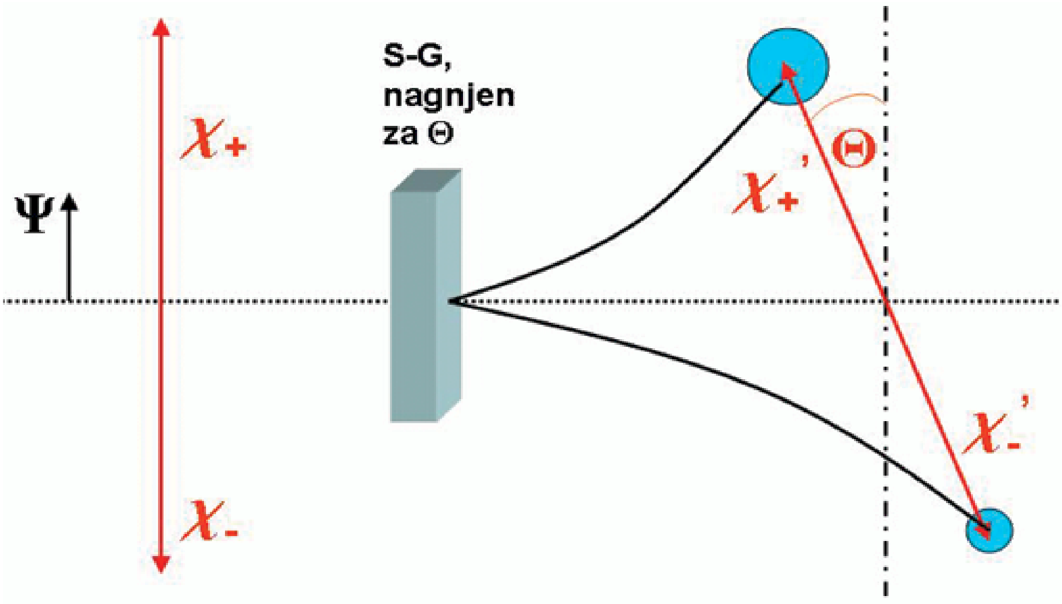

Figure 1: Ta skica prikazuje prehod delca s spinom $\frac{1}{2}$, ki je v stanju $|\psi>$, skozi en Stern-Gerlachov poskus.

Sedaj pa nas zanima, kakšna sta $|\chi'_+>$ in $|\chi'_->$. Izvedeti želimo, kako se $|\chi'_+>$ in $|\chi'_->$ izražata z $|\chi_+>$ in $|\chi_->$ v prvotni smeri. To dobimo tako, da uporabimo rotacijo spinorjev. Velja

$$\chi'_+ = U_\theta \chi_+ \tag{4}$$

$$\chi'_- = U_\theta \chi_-, \tag{5}$$

kjer je U_θ matrika, ki suka bazo:

$$U_\theta = e^{-i\theta\frac{\hat{n}\vec{S}}{\hbar}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

kjer je $\hat{n}$ normalni vektor, ki kaže v smeri spina, $\vec{S}$ pa je vektor spina. To nam potem da

$$\chi'_+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\chi'_- = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Sedaj pa smo pripravljeni, da se lotimo verjetnosti. Najprej nas zanima verjetnost P'_+, da bo delec po tem, ko je šel skozi S-G napravo najdemo v stanju $|\chi'_+>$, če vemo, da je bil pred tem v stanju $|\psi>$. Velja:

$$P'_+ = \left|<\chi'_+|\psi>\right|^2 \tag{9}$$

Če upoštevamo, da je v našem primeru $|\psi>= \chi_+$ in izračunamo skalarni produkt

$$<\chi'_+|\psi>=<\chi'_+|\chi_+>= \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right) = \cos\frac{\theta}{2} \tag{10}$$

dobimo verjetnost

$$P'_+ = \cos^2\frac{\theta}{2} \tag{11}$$

Verjetnost P'_-, da bo delec po izhodu iz S-G naprave v stanju $|\chi'_->$ pa je

$$P'_- = \left|<\chi'_-|\psi>\right|^2 \tag{12}$$

Ko izračunamo še ta skalarni produkt

$$<\chi'_-|\psi>=<\chi'_-|\chi_+>= \left(-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)\left(\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right) = -\sin\frac{\theta}{2} \tag{13}$$

pa dobimo

$$P'_- = \sin^2\frac{\theta}{2} \tag{14}$$

Iz slike 2 lahko vidimo, da je za kote $\theta < \frac{\pi}{2}$ stanje χ'_+ bolj verjetno kot stanje χ'_-. Zato bomo napravili tako prepreko, da bomo na naslednji, tretji S-G poskus spustili le curek delcev, ki imajo spin v smeri $|\chi'_+>$. Drugi, preostali curek s stanji spina v smeri $|\chi'_->$ pa se bo ustavil pred prepreko. S tem smo znova točno določili stanje delcem, ki padejo na tretji S-G poskus: $|\psi'>= \chi'_+$. Pri tem prehodu postopamo podobno, kot smo pri prejšnjem. Stanje delca, ki pride skozi 3. S-G poskus zapisemo v bazi, ki je za kot θ premaknjen glede na prejšnji koordinatni sistem oz. za kot 2θ nagnjen glede na prvotni koordinatni sistem:

$$|\psi'>= c''_1|\chi''_+> +c''_2|\chi''_->, \tag{15}$$

kjer sta $|\chi''_+>$ in $|\chi''_->$ bazna vektorja premaknjenega koordinatnega sistema. Tudi tu slednja dva vektorja zapišemo v prvotni bazi kot

$$\chi''_+ = U_\theta.\chi'_+ = U_\theta(U_\theta\chi_+) = U_\theta^2\chi_+ \tag{16}$$
$$\chi''_- = U_\theta.\chi'_- = U_\theta(U_\theta\chi_-) = U_\theta^2\chi_- \tag{17}$$

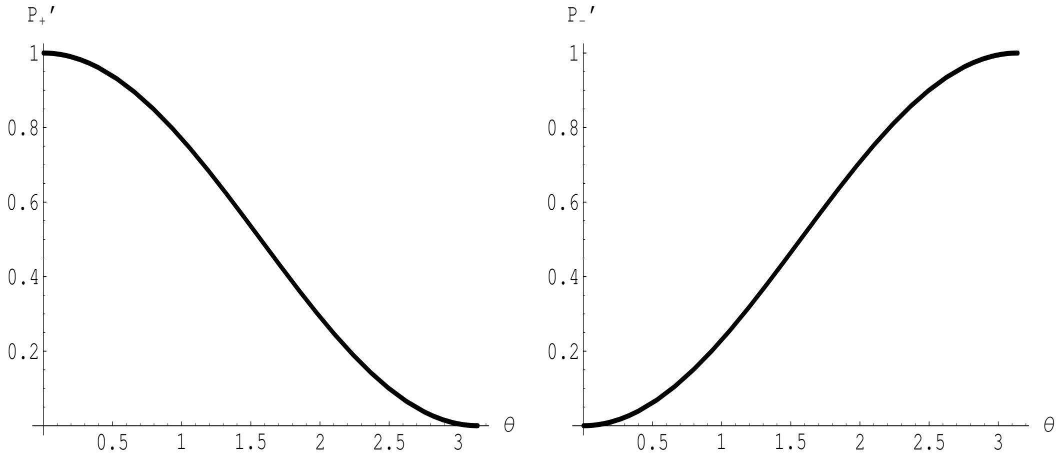

Figure 2: Na sliki sta predstavljena grafa verjetnosti P'_+ in P'_- v odvisnosti od kota zasuka θ S-G naprave.

Če še upoštevamo, kar je U_θ lahko vektorja $|\chi''_+ >$ in $|\chi''_- >$ izrazimo v prvotni bazi $|\chi_+ >$ in $|\chi_- >$ kot

$$\chi''_+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\theta}{2} \\ \sin\frac{2\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\chi''_- = \begin{pmatrix} -\sin\frac{2\theta}{2} \\ \cos\frac{2\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Sedaj še izračunajmo skalarna produkta $< \chi''_+|\chi'_+ >$ in $< \chi''_-|\chi'_+ >$

$$< \chi''_+|\chi'_+ >= \left(\cos\frac{2\theta}{2}, \sin\frac{2\theta}{2}\right)\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \cos\frac{\theta}{2} \tag{20}$$

$$< \chi''_-|\chi'_+ >= \left(-\sin\frac{2\theta}{2}, \cos\frac{2\theta}{2}\right)\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -\sin\frac{\theta}{2} \tag{21}$$

Sedaj smo pridelali vse potrebno, da izračunamo, kakšna je verjetnost P''_+, da je potem, ko delec prečka 3. S-G poskus, v stanju $|\chi''_+ >$, če vemo, da je bil pred tem v stanju $|\chi'_- >$ in kakšna je verjetnost P''_-, da je po prehodu v stanju $|\chi''_- >$:

$$P''_+ = \left|< \chi''_+|\chi'_+ >\right|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2} \tag{22}$$

$$P''_- = \left|< \chi''_-|\chi'_+ >\right|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2} \tag{23}$$

Vidimo, da dobimo enake verjetnosti kot pri prvem prehodu, kar nas vsekakor ne preseneča.

Verjetnosti $\widetilde{P''_+}$ in $\widetilde{P''_-}$, da pa sta delca po prehodu skozi 2 S-G poskusa v stanju $|\chi''_+ >$ in $|\chi''_- >$, če vemo, da je bil delec na začetku v stanju $|\chi_+ >$ pa sta kar produkta delnih verjetnosti:

$$\widetilde{P''_+} = P'_+.P''_+ = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 \tag{24}$$

$$\widetilde{P''_-} = P'_+.P''_- = \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \tag{25}$$

Če pa imamo n S-G-vih poskusov, ki so drug na drugega nagnjeni za kot θ, pa opisani postopek n-krat ponovimo. Verjetnosti $\widetilde{P_+}$ in $\widetilde{P_-}$ da je po prehodu n S-G aparatov delec v stanju $\chi_+^(n)$ oz. χ_-^n, če je bil na začetku v stanju χ_+ je:

$$\widetilde{P_+} = P'_+.P''_+.P_+^{(3)}....P_+^{(n)} = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)^n \tag{26}$$

$$\widetilde{P_-} = P'_+.P''_+.P_+^{(3)}....P_+^{(n-1)}.P_-^{(n)} = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)^{n-1} \sin^2 \frac{\theta}{2} \tag{27}$$

Kot θ lahko zapišemo kot $\theta = \frac{\phi}{n}$, kjer je ϕ kot med prvim in zadnjim S-G poskusom. Če to uporabimo, se verjetnosti glasita

$$\widetilde{P_+} = \left(\cos^n \frac{\phi}{2n}\right)^2 \tag{28}$$

$$\widetilde{P_-} = \left(\cos^{n-1} \frac{\phi}{2n}\right)^2 \sin^2 \frac{\phi}{2n} \tag{29}$$

Sedaj pa si poglejmo, kaj se zgodi v limiti, ko gre $n \to \infty$? Verjetnost, da je delec na koncu v stanju $\chi_+^{(n)}$ je:

$$\widetilde{P_+}(n \to \infty) = \lim_{n\to\infty} \left(\cos^n \frac{\phi}{2n}\right)^2 = 1, \tag{30}$$

saj vemo, da je

$$\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{\phi}{2n} = 1 \tag{31}$$

Verjetnost, da se delec nahaja na koncu v stanju $\chi_-^{(n)}$ pa izračunamo kot

$$\widetilde{P_-} = \lim_{n\to\infty} \left(\cos^{n-1} \frac{\phi}{2n}\right)^2 \sin^2 \frac{\phi}{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\cos^n \frac{\phi}{2n}\right)^2 \tan^2 \frac{\phi}{2n} = 0, \tag{32}$$

ker velja

$$\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{\phi}{2n} = 1 \tag{33}$$

$$\lim_{n\to\infty} \tan^2 \frac{\phi}{2n} = 0 \tag{34}$$