TANEK OBROČ Z MOTNJO

Če se delec nahaja v potencialnem magnetnem in električnem polju, se Schrödingerjeva enačba ustrezno dopolni. V stacionarnem primeru se glasi:

$$\frac{1}{2m}\left((-i\hbar\vec{\nabla}-e\vec{A})^2+e\varphi\right)\Psi=E\Psi$$

kjer upoštevamo:

1. $\varphi = 0$ (nimamo električnega potenciala)
2. $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\Psi + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\Psi = 2\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\Psi + \Psi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

   $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ (Coulombova umeritev)
3. $\Psi = \Psi(\varphi)$

   $\nabla^2\Psi = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}$

   $\vec{\nabla}\Psi = \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi$ (zapis v valjastih koordinatah)
4. $\phi_m = \oint\vec{A}\cdot\vec{ds}$, $\vec{A} = A\hat{e}_\varphi$, $\vec{A} = \frac{\phi_m}{2\pi R}\hat{e}_\varphi$

   (A je konstanten na obroču)

   $\phi_m = \alpha\frac{2\pi\hbar}{e}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Ko to vstavimo v diferencialno enačbo, dobimo:

$$-\Psi'' + i\,2\alpha\Psi' + \left(\alpha^2 - \frac{2mR^2}{\hbar^2}E_n\right)\Psi = 0$$

Brezdimenzijska oblika energije se glasi:

$$\varepsilon_n = \frac{2mR^2}{\hbar^2}E_n$$

Enačbo rešujemo z nastavkom:

$$\Psi = C\, e^{i\mu\varphi}$$

Ko to vstavimo v enačbo, dobimo ven rešitve za μ:

$$\mu_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\varepsilon_n}$$

Upoštevamo še robni pogoj:

$$\Psi(\varphi = 0) = \Psi(\varphi = 2\pi)$$
$$e^{i2\pi n} = e^{i2\pi\mu}$$

Pove nam, da mora biti μ celo število, torej

$$\mu = n \in \mathbb{Z}$$

Če to vstavimo v rešitve za μ, dobimo za brezdimenzijske vrednosti energije:

$$\varepsilon_n = (\alpha - n)^2$$

Vidimo, da če se α spremeni za celo število, energijski spekter ostane enak, lastne funkcije pa se spremenijo.