Zaporedje Stern-Gerlachovih poskusov

Košmrlj Samo

28. junij 2006

1 Naloga

Delec s spinom 1/2 spustimo skozi Stern-Gerlachov poskus in se omejimo le na enega od curkov. Nato tak curek spustimo skozi serijo n Stern-Gerlachovih naprav, kjer je vsaka od naprav zasukana za kot $\varphi = \pi/(2n$ glede na prejšnjo. Vsaka naslednja naprava prestreza tisti curek iz prejšnje naprave, ki ima večjo verjetnost. S kolikšno verjetnostjo delec, ki vstopa v serijo S-G naprav, izhaja skozi obe možni poti izhoda iz zadnje S-G naprave?

2 Rešitev

Naloge se lotimo takole: Na začetku nam curek opisuje valovna funkcija

$$|\psi_0 >= c_1|\chi_+ > +c_2|\chi_- >$$

Po prehodu prve S-G naprave imamo dva curka delcev z dobro definiranim spinom. V naši nalogi se bomo omejili na curek s spinom gor, torej curek z valovno funkcijo $\psi = |\chi_+ >$. Za nadaljnjo obravnavo moramo bazne vektorje spina (spinorje) zavrteti, tako da pridemo v bazo spina za zavrteni S-G poskus. Rotacijo izvršimo s pomočjo rotacijske matrike

$$U_\vartheta = e^{\frac{-i\vartheta\hat{n}\vec{\sigma}}{2}} = Icos\frac{\vartheta}{2} - i\hat{n}\vec{\sigma}sin\frac{\vartheta}{2}$$

kjer je $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ vektor Paulijevih matrik in $\hat{n}$ smerni vektor osi okoli katere zavrtimo poskus.

Za lažje računanje si za os rotacije izberemo kar $(0, 1, 0)$, torej y os.

Matrika rotacije je tako

$$U_\vartheta = \begin{bmatrix} cos\frac{\vartheta}{2} & -sin\frac{\vartheta}{2} \\ \\ sin\frac{\vartheta}{2} & cos\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}$$

Izračunamo nove bazne vektorje:

$$|\chi_+' > = U_\vartheta \cdot |\chi_+ > = \begin{bmatrix} cos\frac{\vartheta}{2} & -sin\frac{\vartheta}{2} \\ \\ sin\frac{\vartheta}{2} & cos\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\frac{\vartheta}{2} \\ \\ sin\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}$$

$$|\chi_-' > = U_\vartheta \cdot |\chi_- > = \begin{bmatrix} cos\frac{\vartheta}{2} & -sin\frac{\vartheta}{2} \\ \\ sin\frac{\vartheta}{2} & cos\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sin\frac{\vartheta}{2} \\ \\ cos\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}$$

Sedaj, ko imamo nove vektorje spina, lahko izračunamo verjetnost, da se delec nahaja v stanju $|\chi_+ >$ ali $|\chi_- >$

$$P_+' = | < \chi_+'|\psi > |^2$$

Vemo da je $|\psi > = |\chi_+ >$ ker smo se omejili samo na enega od curkov, torej lahko zapišemo

$$P_+' = < \chi_+'|\chi_+ >^2 = \left(\begin{bmatrix} cos\frac{\vartheta}{2} & sin\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \right)^2 = cos^2\frac{\vartheta}{2}$$

$$P_-' = < \chi_-'|\chi_+ >^2 = \left(\begin{bmatrix} -sin\frac{\vartheta}{2} & cos\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \right)^2 = sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

Ker se vsakič omejimo le na delec z večjo verjetnostjo in ker velja $|sin\frac{\vartheta}{2}| \leq |cos\frac{\vartheta}{2}|$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se za majhne kote omejimo na curek s spinom gor, torej $|\psi' > = |\chi_+' >$. Verjetnost za delec v posameznem curku po prehodu druge (in vseh naslednjih) S-G naprav izračunamo tako kot za prvo S-G napravo. Delna verjetnost da imamo delec v stanju $| \uparrow^{(n)}> = |\chi_+^{(n)} >$ je vsakič $\tilde{P}_+ = cos^2\frac{\vartheta}{2}$, za stanje $| \downarrow^{(n)}> = |\chi_-^{(n)} >$ pa imamo delno verjetnost $\tilde{P}_- = sin^2\frac{\vartheta}{2}$

Celotna verjetnost da po n poskusih dobimo delec s spinom gor je $P_+ = \tilde{P}_+^n = (cos^2\frac{\vartheta}{2})^n$, za delec s spinom dol pa $P_- = \tilde{P}_+^{n-1} P_- = (cos^2\frac{\vartheta}{2})^{n-1} sin^2\frac{\vartheta}{2}$. Zanimivo si je še ogledati dogajanje v limiti $n \to \infty$ Če imamo serijo n S-G poskusov ki so skupno zavrteni za kot Φ, $\Phi = n\vartheta$ oz. $\vartheta = \frac{\Phi}{n}$ je verjetnost da imamo na koncu delec s spinom gor $P_+ = \lim_{x\to\infty}(cos^2\frac{\Phi}{2n})^n = 1$, verjetnost da dobimo delec s spinom dol pa je $P_- = \lim_{x\to\infty}(cos^2\frac{\Phi}{2n})^{n-1}sin^2\frac{\Phi}{2n} = 0$.