Vaje iz kvantne mehanike I

Lastna stanja na obroču z magnetnim pretokom

Naloga:

Poišči lastna stanje in energije ne obroču,znotraj katerega je magnetni pretok Φ_m. Za katere vrednosti je spekter sistema enak? Kako se razlikujejo lastna stanja sistema,ki imajo pri različnih vrednostih magnetnega pretoka enake lastne energije?

Rešitev:

Schrödingerjeva enačba za delec v stacionarnem magnetnem in električnem polju je

$$\frac{1}{2\mathrm{m}}\left((i\hbar\vec{\nabla}+e\vec{A})^2+e\phi\ \right)\Psi=E\Psi\ ,$$

Pri čemer je $\vec{A}$ -magnetni potencial ϕ -električni. In velja zveza $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ in $\vec{E}=-\nabla\phi$. Nadaljnjo upoštevamo, da v našem primeru ni električnega potenciala ter da je

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\,\Psi)+\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\,\Psi=2\vec{A}\,\vec{\nabla}\,\Psi+\Psi\,\vec{\nabla}\vec{A}$$
$$\vec{\nabla}\vec{A}=0\ \text{(Coulombova umiritev).}$$

Tako dobimo

$$-\nabla^2\Psi+\frac{2ie\vec{A}}{\hbar}\vec{\nabla}\,\Psi+(\frac{e^2A^2}{\hbar^2}-\frac{2mE_n}{\hbar^2})\,\Psi=0\ .$$

To lažje izračunamo v cilindričnih koordinatah, kjer je

$$\nabla^2\Psi=\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}\ \text{ in }\ \vec{\nabla}\,\Psi=\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\ .$$

Tu predpostavimo, da je $\Psi=\Psi(\phi)$, saj zaradi tankega obroča so lastne funkcije v ostalih dveh smereh v osnovnem stanju. Tako dobimo enačbo

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}+i2a\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}+(a^2-\varepsilon_n)\,\Psi=0\ ,$$

pri čemer je $a=\dfrac{e\Phi_m}{2\pi\hbar}$, kjer smo upoštevali, da je $\vec{A}$ konstanten da obroču in velja

$$\Phi_m=\oint\vec{A}\,d\vec{s}\ ,\ \ \vec{A}=A\,\hat{e_\phi}\ \ ,\ \vec{A}=\frac{\Phi_m}{2\pi\mathrm{R}}\hat{e_\phi}\ \ ,$$

ter $\varepsilon_n = \frac{2mR}{\hbar^2} E_n$ brezdimenzijska oblika energije. Tako dobljeno diferencialno enačbo drugega reda, uženemo z nastavkom $\Psi = Ce^{i\mu}$. Tako dobimo rešitve

$$\mu_{1,2} = a \pm \sqrt{\varepsilon_n}$$

Z upoštevanjem robnih pogojev $\Psi(\ =0) = \Psi(\ =2\pi)$, vidimo da je

$$\mu = n \in Z \ .$$

Če to vstavimo v rešitev dobimo za enrgije

$$\varepsilon_n = (a - n)^2$$

Vidimo da če se a spremeni za celo število, energijski spekter ostane enak lastne funkcije pa se spremenijo.