0.1 Naloga

Delec z maso m in nabojem e se nahaja v osnovnem stanju harmonskega oscilatorja s frekvenco ν. Za kratek čas τ vklopimo električno polje z velikostjo E in ga nato izklopimo. Kako je pričakovana vrednost energije delca po izklopu polja odvisna od časa vklopa τ in kolikšna je njena maksimalna vrednost?

0.2 Rešitev

Preden vklopimo električno polje, lahko hamiltonovo funkcijo za delec zapišemo takole:

$$H_1 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x_1^2 \tag{1}$$

Po vkopu polja pa se oblika hamiltonjana nekoliko spremeni:

$$H_2 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x_1^2 - eEx_1 \tag{2}$$

Del funkcije, ki vsebuje linearni in kvadratni člen v potencialu z električnim poljem, poskusimo preoblikovati na popolni kvadrat.

$$H_2 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x_1 - \frac{eE}{m\omega^2})^2 - \frac{e^2E^2}{2m\omega^2} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x_1 - \Delta x)^2 - W_0 = \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x_2^2 - W_0$$

Nekaj novih količin:

$$\Delta x = \frac{eE}{m\omega^2}; p_2 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1} = p_1; W_0 = \frac{e^2E^2}{2m\omega^2}$$

Potencial je enake oblike kot prej, le da je za konstanto Δx premaknjen v levo od izhodiščne lege in za W_0 navzdol. V novem sistemu zapišimo še operatorje a_2 in $a_2^\dagger$ s pomočjo a_1, $a_1^\dagger$.

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x_2}{x_0} + i\frac{p_2}{p_0}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x_1 - \Delta x}{x_0} + i\frac{p_1}{p_0}) = a_1 - \frac{eE}{\sqrt{2}x_0 m\omega^2} = a_1 + \beta$$

$$a_2^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x_2}{x_0} - i\frac{p_2}{p_0}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x_1 - \Delta x}{x_0} - i\frac{p_1}{p_0}) = a_1^\dagger - \frac{eE}{\sqrt{2}x_0 m\omega^2} = a_1^\dagger + \beta$$

Konstanto β dobimo zaradi premika centra harmonskega oscilatorja, konstanti x_0 in p_0 pa sta

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}; p_0 = \frac{\hbar}{x_0}$$

Koherentna stanja prvotnega sistema so lastna stanja operatorja a_1:

$$a_1|\alpha_1 >= \alpha_1|\alpha_1 >$$

Zato velja za stanja premaknjenega operatorja:

$$a_2|\alpha_1 >= (\alpha_1 + \beta)|\alpha_1 >$$

Koherentna stanja prvotnega sistema so tudi koherentna stanja premaknjenega sistema,

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \beta \tag{3}$$

pa je torej parameter koherentenga stanja v premaknjenem sistemu.

V prvotnem sistemu je v osnovnem stanju parameter koherentnega stanja enak $\alpha_1 = 0$, torej velja, da se v premaknjenem sistemu delec nahaja v koherentnem stanju s parametrom $\alpha_2 = \beta$.

Ker β ni enak 0, se parameter koherentnega stanja v premaknjenem sistemu, medtem ko je vklopljeno električno polje, s časom spreminja.

$$|\alpha_2, t >= e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_n \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} |n_2 >= e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_n \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega n t} |n_2 >=$$

$$= e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_n \frac{(\beta e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} \frac{(a_2^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0 >= e^{\frac{-i\omega t}{2}} |\beta e^{-i\omega t}, 0 >$$

torej:

$$\alpha_2(t) = \beta e^{-i\omega t}$$

Po času $t = \tau$ električno polje izklopimo. Zanima nas, v katerem koherentem stanju originalnega sistema se nahaja koherentno stanje s parametrom $\alpha_2(t)$. Podobno kot pri enačbi (3) ugotovimo, da velja

$$\alpha_1(\tau) = \beta e^{-i\omega\tau} - \beta$$

Kolikšna je torej energija delca po izklopu polja?

$$E = \hbar\omega(\alpha_1^*(\tau)\alpha_1(\tau) + \frac{1}{2}) = \hbar\omega\beta^2(e^{i\omega t} - 1)(e^{-i\omega t} - 1) + \frac{\hbar\omega}{2} = 2\hbar\omega\beta^2(1 - \cos\omega\tau) + \frac{\hbar\omega}{2}$$

maksimumi funkcije:

$$\omega\tau = \pi + 2k\pi; k \in \mathcal{Z}$$

Treba je tudi omeniti, da se po izklopu polja energija ne spreminja več, saj velja

$$\alpha_1(t) = \alpha_1(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)}$$

in pri računanju energije časovni del odpade.