Vaje iz Kvantne mehanike 1

Delec v polneskončni potencialni jami

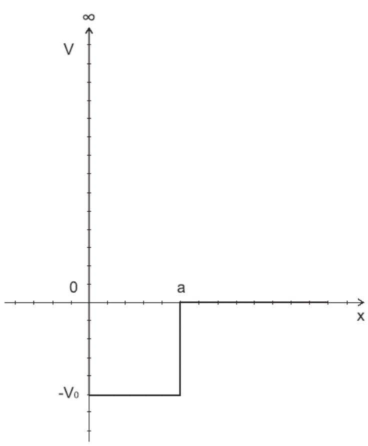
Katarina Mramor

6. marec 2006

Poišči transcendentno enačbo za vezana lastna stanja delca v polneskončni potencialni jami oblike

$$V(x) = \begin{cases} \infty & ; \quad x < 0 \\ -V_0 & ; \quad 0 < x < a \\ 0 & ; \quad a < x \end{cases} . \tag{1}$$

Kako je število vezanih stanj odvisno od parametrov sistema?



Rešujemo *Schrödingerjevo* enačbo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2} + V\Psi(x) = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \qquad ali \tag{2}$$

$$H\Psi(x) = E\Psi(x). \tag{3}$$

Valovno funkcijo zapišemo kot:

1. $\psi_1(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$; 0<x<a,
2. $\psi_2(x) = C\exp(-\kappa x)$; x>a.

Robni pogoji:

- $\psi(0) = 0$

- $\psi_1(a) = \psi_2(a)$
- $\frac{\partial\psi_1(x)}{\partial x}|_{x=a} = \frac{\partial\psi_2(x)}{\partial x}|_{x=a}$.

Tu je $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E+V_0)}$ in $\kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(-E)}$.
V prvo enačbo vstavimo prvi robni pogoj. Dobimo:

$$\psi(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Drugi in tretji robni pogoj nam dasta:

$$\psi_1(a) = B\sin(ka) = C\exp(-\kappa a) \tag{4}$$

$$\frac{\partial\psi_1(x)}{\partial x}|_{x=a} = kB\cos(ka) = -\kappa C\exp(-\kappa a) = \frac{\partial\psi_2(x)}{\partial x}|_{x=a}. \tag{5}$$

Delimo enačbo 5 z enačbo 4 in dobimo:

$$-\kappa = kctg(ka).$$

$$-\frac{\kappa}{k} = ctg(ka) \tag{6}$$

Naj bo

$$z_0 = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0} \qquad in$$

$$z_i = k \cdot a = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_0)}.$$

Velja:

$$z_i^2 = \frac{a^2}{\hbar^2}2mE + \frac{a^2}{\hbar^2}2mV_0 = -a^2\kappa^2 + z_0^2.$$

$$a\kappa = \sqrt{z_0^2 - z_i^2} \tag{7}$$

Enačbo 7 vstavimo v enačbo 6 in dobimo:

$$-\frac{\kappa}{k} = \sqrt{\frac{z_0^2 - z_i^2}{z_i^2}} = ctg(z_i).$$

Poglejmo še limitne primere:

- $k_0 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ ni vezanih stanj. Če izrazimo še V_0:

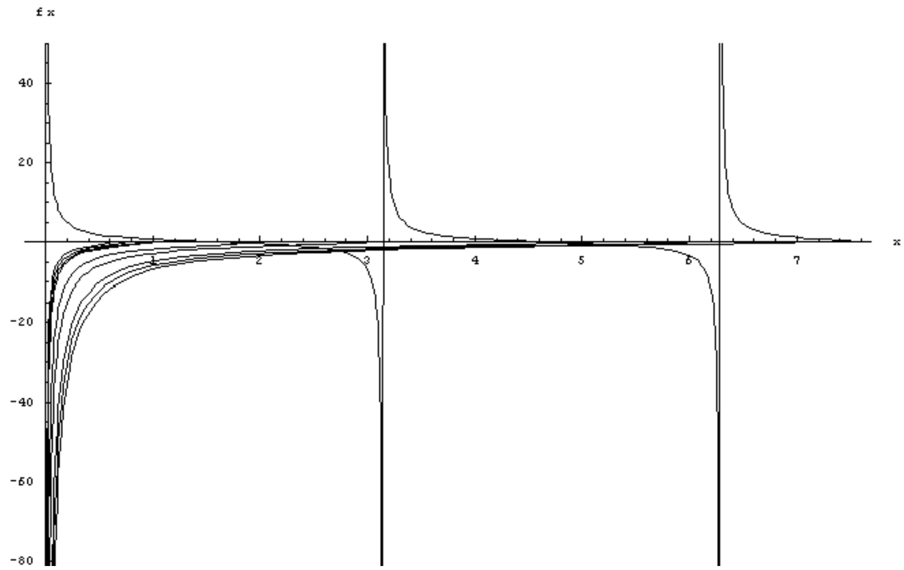
$$z_0 = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0}$$

$$V_0 = \frac{{k_0}^2\hbar^2}{2m}$$

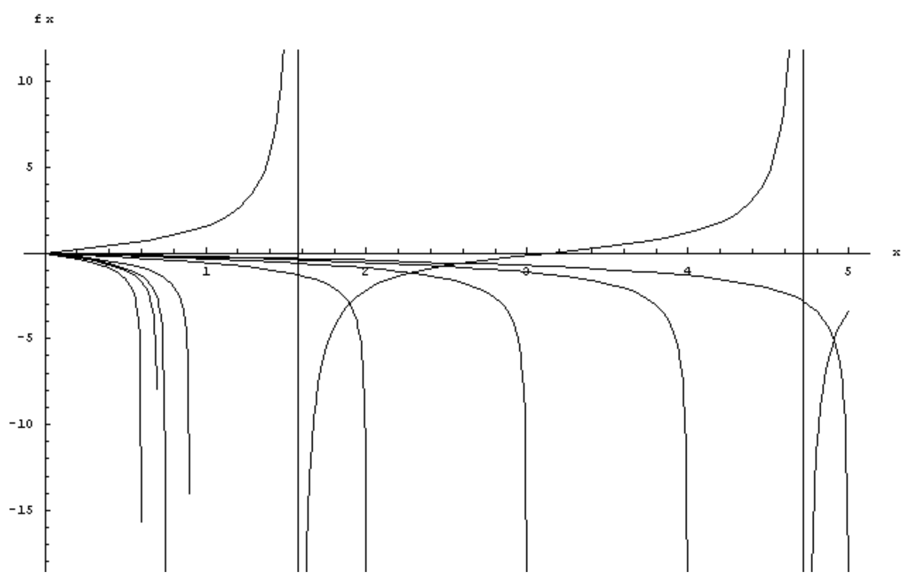
$$V_0 > \frac{(\frac{\pi}{2})^2\hbar^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2}{8m}$$

- $k_0 \to \infty \Rightarrow k_i \to \pi$

$$E_i = \frac{{z_i}^2\hbar^2}{2ma^2} + V_0$$



Slika 1: Grafičen prikaz rešitev:$-\frac{\kappa}{k} = ctg(k)$. Presečišča $ctg(k)$ z funkcijo $-\frac{\kappa}{k}$ predstavljajo energijo. Pod $\frac{\pi}{2}$ vezanih stanj ni, zato tudi ni presečišč.



Slika 2: Grafičen prikaz rešitev: $-\frac{k}{\kappa} = \tan(k)$.