Dvonivojski sistem (by Jurij Sodja)

Naloga

Zapiši časovni razvoj sistema $\psi = c'_+ \left|+\right\rangle + c'_- \left|-\right\rangle$, kjer vektorja $\left|+\right\rangle$ in $\left|-\right\rangle$ predstavljata bazo.

Operator energije je časovno odvisen in je oblike:

$$\widehat{H} = H(t) = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha e^{i\omega t} \\ \alpha e^{-i\omega t} & -E_0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Rešitev

ψ zapišem v obliki vektorja:

$$\psi = \begin{pmatrix} c'_+ \\ c'_- \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

in vstavim v Schrödingerjevo enačbo. Dobim sistem dveh sklopleјnih diferencialnih enačb s časovno odvisnimi koeficienti:

$$E_0 c'_+ + \alpha c'_- e^{i\omega t} = ih\dot{c}'_+ \tag{2.2}$$

$$\alpha c'_+ e^{-i\omega t} - E_0 c'_- = ihc'_- \tag{2.3}$$

Za koeficienta c'_+ in c'_- uvedem novo spremenljivko:

$$c'_+ = c_+ e^{-i\frac{E_0}{h}t} \tag{2.4}$$

$$c'_- = c_- e^{i\frac{E_0}{h}t} \tag{2.5}$$

S tem enačbi (2.2) in (2.3) bistveno poenostavim:

$$\frac{\alpha}{ih} c_- e^{iAt} = \dot{c}_+ \tag{2.6}$$

$$\frac{\alpha}{ih} c_+ e^{-iAt} = \dot{c}_- \tag{2.7}$$

Kjer v A pospravim konstante:

$$A = \frac{2E_0}{h} + \omega \tag{2.8}$$

Enačbi razklopim tako, da iz enačbe (2.6) izrazim c_- in dobleni izraz vstavim v enačbo (2.7).

Enako ponovim še za drugo spremenljivko . Dobim dve enačbi drugega reda s konstantnimi koeficienti, ki tudi nista več sklopljeni:

$$\ddot{c}_+ - iA\dot{c}_+ + \frac{\alpha^2}{h^2} c_+ = 0 \tag{2.9}$$

$$\ddot{c}_- + iA\dot{c}_- + \frac{\alpha^2}{h^2} c_- = 0 \tag{2.10}$$

Reševanja se lotim z nastavkom:

$$c = Ce^{i\omega t} \tag{2.11}$$

pri čemer dopuščam možnost, da $\omega \in \mathbb{C}$:

$$\omega = \alpha + i\beta \tag{2.12}$$

Nastavek vstavim v enačbo (2.9) oz. (2.10) in dobim po dve rešitvi za za ω posamezno enačbo. Za enačbo (2.9) sta ti rešitvi:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}(A \mp \sqrt{A^2 + 4B}) \tag{2.13}$$

Za enačbo (2.10) pa:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}(-A \mp \sqrt{A^2 + 4B}) \tag{2.14}$$

A je še vedno enak (2.8), B pa je:

$$B = \frac{\alpha^2}{h^2} \tag{2.15}$$

Da dobim končno rešitev samo še vstavim izračunane parametre nazaj v prvotne spremenljivke .