Vaje iz Kvantne mehanike I

Komutatorji in eksponenti operatorjev

Jaka Bobnar

Naloga

Pokaži, da velja zveza

$$\exp(\hat{A}+\hat{B}) = \exp(\hat{A})\exp(\hat{B})\exp(-\left[\hat{A},\hat{B}\right]/2),$$

če velja $\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]=0$ in $\left[\hat{B},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]=0$

Rešitev

Zapišimo operator

$$f(t) = \exp(t(A+B))\exp(-tA)\exp(-tB) \tag{1}$$

in ga odvajajmo po argumentu t.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = e^{t(A+B)}(A+B)\,e^{-tA}\,e^{-tB} + e^{t(A+B)}\,e^{-tA}(-A)\,e^{-tB} + e^{t(A+B)}\,e^{-tA}\,e^{-tB}\,(-B) \tag{2}$$

Če opštevamo še, da je $[A, f(A)] = 0$, dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = e^{t(A+B)}B\,e^{-tA}\,e^{-tB} - f\,B \tag{3}$$

Poglejmo, kaj dobimo za komutator $\left[A^N,B\right]$:

$$\left[A^N,B\right] = A\left[A^{N-1},B\right] + [A,B]\,A^{N-1} = A^2\left[A^{N-2},B\right] + A\,[A,B]\,A^{N-2} + [A,B]\,A^{N-1} \tag{4}$$

Ker pa A komutira z $[A,B]$, lahko zapišemo:

$$\left[A^N,B\right] = A^2\left[A^{N-2},B\right] + 2\,[A,B]\,A^{N-1} = ... = NA^{N-1}\,[A,B] \tag{5}$$

Od tod pa dobimo:

$$BA^N = A^N B - NA^{N-1}\,[A,B] \tag{6}$$

Iz dosedanjih računov sledi:

$$\begin{aligned}
Be^{-tA} &= B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}BA^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}\left(A^n B - nA^{n-1}\,[A,B]\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n A^n}{n!}B - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n A^{n-1}}{(n-1)!}\,[A,B] = e^{-tA}B - (-t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^{n-1}A^{n-1}}{(n-1)!}\,[A,B] = \\
&= e^{-tA}B + t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-t)^{n-1}A^{n-1}}{(n-1)!}\,[A,B] = e^{-tA}B + te^{-tA}\,[A,B]
\end{aligned} \tag{7}$$

Sedaj pa lahko izrazimo:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = e^{t(A+B)} \left(e^{-tA} B + t e^{-tA} \left[A, B \right] \right) e^{-tB} \, - f \, B \tag{8}$$

Ker $[B, f(B)] = 0$ in ker $[[A, B] \, , f(B)] = 0$, dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f t \left[A, B \right]$$

Dobljeni izraz integriramo in dobimo (integracijsko konstanto postavimo na 1, da zadostimo identiteti pri $t = 0$):

$$f(t) = e^{\frac{t^2}{2} [A,B]} = e^{t(A+B)} e^{-tA} e^{-tB} \tag{9}$$

Postavimo $t = 1$ in dobimo:

$$e^{\frac{1}{2} [A,B]} = e^{A+B} e^{-A} e^{-B} \tag{10}$$

Iz zadnje enačbe že lahko ugotovimo, da je $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, če postavimo $B = -A$. Če to upoštevamo, se nam zgornja enakost prepiše v:

$$e^{A+B} = e^{\frac{1}{2} [A,B]} e^B e^A \tag{11}$$

Naredimo sedaj substituciji $A \rightarrow B$ in $B \rightarrow A$ in upoštevajmo, da je $B + A = A + B$ ter $[B, A] = - [A, B]$:

$$e^{B+A} = e^{-\frac{1}{2} [A,B]} e^A e^B = e^{A+B}. \tag{12}$$

Ker velja $\left[e^A, e^{[A,B]} \right] = 0$ in $\left[e^B, e^{[A,B]} \right] = 0$, dobimo končni izraz:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2} [A,B]} \tag{13}$$

QED