Komutatorji in klasična mehanika

Ivo List

3. april 2006

1 Konstanten komutator

Pokaži, da je komutator dveh operatorjev lahko konstanten le v primeru neskončne baze.

1.1 Rešitev

Najprej si oglejmo, kdaj je komutator konstanten, kadar ga zapišemo s pomočjo matrike:

$$[A, B] = k$$

$$[A, B]\psi = (AB - BA)\psi = k\psi$$

$$AB - BA = kI$$

Vidimo da, kadar je ψ razvit po lastnih funkcijah, potem mora biti konstanten komutator ravno enotska matrika, ki pomnoži vsako lastno funkcijo z enako konstanto. Oglejmo si, kaj se dogaja s sledjo matrike, ko izrazimo komutator s pomočjo osnovne povezave:

$$\mathrm{Tr}M = \sum_{i=1}^{n} (M)_{ii}$$

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(B)_{jk}$$

$$\mathrm{Tr}AB = \sum_{i,j=1}^{n} (A)_{ij}(B)_{ji}$$

$$\mathrm{Tr}[A,B] = \sum_{i,j=1}^{n} (A)_{ij}(B)_{ji} - \sum_{i,j=1}^{n} (B)_{ij}(A)_{ji} = 0$$

Vidimo, da je sled komutatorja končne dimenzije enaka nič, torej mora komutator delovati na neskončno bazo, vkolikor želimo da je konstanten.

Za primer si oglejmo operatorja koordinate in gibalne količine izražena v bazi polinomov (morda malce nenavadno, ker baza ni ortonormalna).

$$\begin{aligned}
\hat{x}_n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ & \vdots & & \end{pmatrix} \\
\hat{p}_n &= -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & \end{pmatrix} \\
\hat{p}_4\hat{x}_4 &= -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
\hat{x}_4\hat{p}_4 &= -i\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathrm{Tr}\left(\hat{p}_4\hat{x}_4 - \hat{x}_4\hat{p}_4\right) &= 0 \\
\mathrm{Tr}\left(\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p}\right) &= -i\hbar
\end{aligned}$$

2 Prepis klasične funkcije v Hamiltonov operator

Na primeru pokaži, da v splošnem dani klasični Hamiltonovi funkciji koordinat q in momentov p ne moremo enolično predpisati ustreznega Hamiltonovega operatorja. Pokaži, da se posamezni predpisi razlikujejo v členih, ki so soraznerni z $\hbar^n$, kjer je $n \geq 1$ (dovolj je to pokazati za produkt potenc operatorjev $\hat{p}$ in $\hat{q}$).

2.1 Primer

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2m}(p - eA(x))^2 \\
\hat{H}_1 &= \frac{1}{2m}(\hat{p} - e\hat{A})^2 = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 - e\hat{p}\hat{A} - e\hat{A}\hat{p} - e^2\hat{A}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}_2 &= \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 - 2e\hat{p}\hat{A} + e^2\hat{A}^2) \\
\hat{H}_3 &= \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 - 2e\hat{A}\hat{p} + e^2\hat{A}^2)
\end{aligned}$$

Problem je v tem, da operatorja $\hat{p}$ in $\hat{A}$ne komutirata. Zato si oglejmo komutator med $\hat{p}$ in poljubno funkcijo koodrinate $f(\hat{q})$:

$$\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}^n] &= \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}^{n-1}] + [\hat{A}, \hat{B}^{n-1}]\hat{B} = nB^{n-1}[A, B] \\
[\hat{A}, f(\hat{B})] &= \sum_{n=0}^{\infty}[A, \frac{f^{(n)}(\hat{B})}{n!}\hat{B}^n] = \sum_{n=0}^{\infty} n\hat{B}^{n-1}[\hat{A}, \frac{f^{(n)}(\hat{B})}{n!}\hat{B}] \\
&= [\hat{A}, \hat{B}]\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{f^{(n)}(\hat{B})}{n!}\hat{B}^{n-1} = f\prime(\hat{B})[\hat{A}, \hat{B}] \\
[\hat{p}, f(\hat{q})] &= -i\hbar f\prime(\hat{q})
\end{aligned}$$

Če sedaj primerjamo med sabo različne operatorje $\hat{H}$, ki smo jih dobili:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_1 &= \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 - e\hat{p}\hat{A} - e(\hat{p}\hat{A}e - [\hat{p}, \hat{A}]) - e^2\hat{A}^2) = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 - 2e\hat{p}\hat{A} - e^2\hat{A}^2 + i\hbar A\prime) \\
\hat{H}_2 &= \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 - 2e\hat{p}\hat{A} + e^2\hat{A}^2) \\
\hat{H}_3 &= \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 - 2e(\hat{p}\hat{A}e - [\hat{p}, \hat{A}]) + e^2\hat{A}^2) = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 - 2e\hat{p}\hat{A} - e^2\hat{A}^2 + 2i\hbar A\prime)
\end{aligned}$$

vidimo, da se operatorji med seboj razlikujejo za člene $i\hbar$, kar je pri elektromagnetnem potencialu še najmanjši problem, saj so dodatni členi odvisni zgolj od umeritvene transformacije in ne vplivajo na rešitev gibalnih enačb.

2.2 Dokaz

Da pa se bolj splošno pokazati, da bo razlika vedno v členih, ki so sorazmerni z $(-i\hbar)^n$. Trdimo, da lahko produkt poljubnega zaporedja $\hat{p}$-jev in $\hat{q}$-jev, zapišemo kot vsoto samih členov oblike $\hat{p}^A\hat{q}^B$, ki so sorazmerni s faktorjem $(-i\hbar)^n$:

$$\hat{p}^{\alpha_0}\hat{q}^{\beta_1}\hat{p}^{\alpha_1}\hat{q}^{\beta_2}\ldots\hat{p}^{\alpha_n} = \sum c_i(-i\hbar)^{\frac{1}{2}(A+B-x-y)}\hat{p}^x\hat{q}^y \quad \text{kjer je} \quad \begin{aligned} A &= \sum \alpha_i \leq x \\ B &= \sum \beta_i \leq y \end{aligned}$$

Dokaza se lotimo induktivno, kjer predpostavljamo, da neko zaporedje $A-1$ $\hat{p}$-jev in $B-1$ $\hat{q}$-jev že znamo zapisati na opisan način. V takem zaporedju poiščemo poljubno pojavitev produkta $\hat{q}\hat{p}$. Če take pojavitve ni, je zaporedje že zapisano v željeni obliki, sicer pa jo nadomestimo z ustreznim komutatorjem $A(\hat{q}\hat{p})B = A(\hat{p}\hat{q} - [\hat{p}, \hat{q}])B = A(\hat{p}\hat{q} + i\hbar)B = A(\hat{p}\hat{q})B + i\hbar AB$. Če gledamo prvotno zaporedje in pa prvi del rezultata $A(\hat{p}\hat{q})B$, je sedaj zaporedje malenkost bližje $\hat{p}^x\hat{q}^y$, kar bi lahko formalno pokazali s štetjem pojavitev določenega $\hat{p}$ za poljubnim $\hat{q}$ (taka vsota se z vsako zamenjvo zmanjša, dokler ne postane 0). Torej lahko s takimi zamenjavami s časoma pridemo do željene oblike. Ostane pa nam edino še preostanek oblike $i\hbar AB$, ki ima ravno $A-1$ $\hat{p}$-jev in $B-1$ $\hat{q}$-jev, torej ga lahko po indukcijski predpostavki tudi ustrezno zapišemo. Q.E.D.