Domača naloga iz kvantne mehanike 1

Vezano stanje na δ potencialu

Tilen Čadež

Poišči vezano stanje delca na potencialu oblike $V(x) = -W_0\delta(x)$, kjer je W_0 pozitivna konstanta. Izračunaj nedoločenost koordinate in gibalne količine za vezano stanje.

Vezano stanje

Schrodingerjeva enačba je v tem primeru

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - W_0\delta(x)\Psi.$$

Za vezano stanje poiščem rešitev stacionarne Schrodingerjeve enačbe

$$E\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - W_0\delta(x)\Psi,$$

ki se glasi

$$\Psi(x,t) = \psi(x)exp(-i\frac{E}{\hbar}t).$$

Sedaj stacionarno Schrodingerjevo enačbo integriram od $-\epsilon$ do ϵ:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} E\psi\, dx = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\, dx - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} W_0\,\delta(x)\psi\, dx,$$

kjer naredim približek, da je ψ enaka na intervalu od $-\epsilon$ do ϵ (kar lahko naredim, ker je ψ zvezna funkcija)

$$2E\psi(0)\epsilon = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{-\epsilon}^{\epsilon} - W_0\psi(0).$$

Ko si ogledam $\lim_{\epsilon\to 0}$ dobim

$$0 = -\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\partial\psi}{\partial x}|_{-\epsilon} - \frac{\partial\psi}{\partial x}|_{\epsilon}) - W_0\psi(0),$$

kjer je razvidno, da ima odvod valovne funkcije skok pri x=0.
Stacionarna Schrodingerjeva enačba je povsod okoli x=0 enaka

$$E\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}.$$

Vezano stanje dobimo, če gre valovna funkcija na robovih dovolj hitro proti 0 (ψ mora biti v kvadratu integrabilen). Zato mora biti E<0. Rešitve stacionarne Schrodingerjeve enačbe so

$$\psi(x) = A\exp(-\kappa x) + B\exp(\kappa x),$$

kjer sem uvedel koeficient κ:

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}.$$

Ti rešitvi veljata povsod, razen pri $x = 0$. Koeficienta A in B sta različna za $x > 0$ in $x < 0$. Iz pogoja, da mora iti valovna funkcija proti 0, ko gre x proti $\pm\infty$ dobim za levo in desno stran rešitvi:

$$\psi_L = C\exp(\kappa x),$$

$$\psi_D = D\exp(-\kappa x).$$

Ker mora biti ψ zvezen ($\psi_L(0) = \psi_D(0)$) sledi

$$C = D.$$

Velja pa tudi

$$\psi_D{}'(0) - \psi_L{}'(0) = \frac{2mW_0}{\hbar^2}\psi(0),$$

torej je

$$\kappa = \frac{W_0 m}{\hbar^2}.$$

Iz enačenja κ dobim energijo

$$E = -\frac{W_0{}^2 m}{2\hbar^2}.$$

Iz normalizacije določim konstanto C

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1,$$

ki je enaka

$$C = \pm\sqrt{\kappa}.$$

Nedoločenost koordinate

Nedoločenost koordinate je

$$\delta x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2}.$$

Pričakovana vrednost x je enaka 0, ker imam v integralu produkt sode in lihe funkcije, pričakovana vrednost x^2 pa je

$$< x^2 >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x^2 \psi \, dx = 2C^2 \int_0^{\infty} x^2 \exp(-2\kappa x) \, dx = \frac{1}{2\kappa^2}.$$

Nedoločenost koordinate je potem

$$\delta x = \tfrac{1}{\sqrt{2}\kappa}.$$

Nedoločenost gibalne količine

Operator gibalne količine je

$$p = -i\hbar\tfrac{\partial}{\partial x},$$

nedoločenost gibalne količine pa je enaka

$$\delta p = \sqrt{< p^2 > - < p >^2}.$$

Najprej izračunam pričakovano vrednost p

$$\begin{gathered}\langle p \rangle = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(-i\hbar\tfrac{\partial}{\partial x})\psi dx = \\ = -i\hbar C^2\kappa \textstyle\int_{-\infty}^{0} \exp{(2\kappa x)}dx - i\hbar C^2\kappa \int_{0}^{\infty} \exp{(-2\kappa x)}\ dx = 0,\end{gathered}$$

nato pa še pričakovano vrednost p^2

$$\begin{gathered}\langle p^2 \rangle = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* p^2 \psi dx = -\hbar^2 C^2\kappa^2 \int_{-\infty}^{-\epsilon} \exp{(2\kappa x)}dx - \\ -\hbar^2 C^2\kappa^2 \textstyle\int_{\epsilon}^{\infty} \exp{(-2\kappa x)}dx - \hbar^2 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi^* \tfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} dx = \\ = -\tfrac{\hbar^2\kappa^2}{2} - \tfrac{\hbar^2\kappa^2}{2} + 2m \textstyle\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi^*(E\psi + W_0\delta(0)\psi)dx = \hbar^2\kappa^2,\end{gathered}$$

ker je prvi del v zadnjem integralu 0, ko naredim limito ϵ proti 0, ostane samo drugi del z delta funkcijo, ki pa je

$$2m \textstyle\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi^* W_0 \delta(0)\psi dx = 2mW_0 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi^* \delta(0)\psi dx = 2mW_0 C^2 = 2\hbar^2\kappa^2.$$

Nedoločenost gibalne količine je enaka

$$\delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \hbar\kappa.$$

Produkt nedoločenosti koordinate in nedoločenosti gibalne količine pa je enak

$$\delta p \delta x = \tfrac{\hbar}{\sqrt{2}}.$$