Prost delec v eni dimenziji

15.2.2006

Zapiši valovno funkcijo za delec v eni dimenziji, ki se z verjetnostjo P giblje z dobro določeno gibalno količino v eni smeri in z verjetnostjo 1-P ter enako velikostjo gibalne količine v nasprotni smeri. Zapiši, kako se valovna funkcija spreminja s časom. Poišči krajevno verjetnostno gostoto in verjetnostni tok za takšno stanje.

Schrodingerjeva enačba za prost delec se zapiše

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

katere rešitev je ravni val

$$\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}.$$

Iz navodil preberemo, da je $P\propto A^2$ in $1-P\propto B^2$, vendar vrednosti A in B ne moremo določiti, saj take valovne funkcije ne moremo normalizirati. Vemo le, da je seštevek $A^2+B^2\propto 1$, zatorej je $\beta A^2+\beta B^2=1$, kjer je β nek sorazmernostni koeficient. Če β izrazimo dobimo $\beta=\dfrac{1}{A^2+B^2}$.

1. Časovni razvoj

Sumimo, da je vredu, če je časovni razvoj valovne dunkcije kar valovna funkcija pomnožena z $e^{-i\omega t}$. Poizkusimo torej nastavek

$$\Psi(x,t)=\left(Ae^{ikx}+Be^{-ikx}\right)e^{-i\omega t}$$

in ga vstavimo v Schrodingerjevo enačbo.

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$$

$$\hbar\omega e^{-i\omega t}\left(Ae^{ikx}+Be^{-ikx}\right)=\frac{\hbar^2}{2m}e^{-i\omega t}k^2\left(Ae^{ikx}+Be^{-ikx}\right)$$

Iz tega pridemo do pogoja, da je $\omega=\dfrac{\hbar k^2}{2m}$.

2. Krajevna verjetnostna gostota

$$\rho(x,t)=\left|\Psi\right|^2=\left(A^*e^{-ikx}+B^*e^{ikx}\right)\left(Ae^{ikx}+Be^{-ikx}\right)e^{i\omega t}e^{-i\omega t}$$
$$=A^*A+B^*B+A^*Be^{-2ikx}+B^*Ae^{2ikx}$$

Pri gornjem računu smo upoštevali da se časovna dela med seboj izničita. Verjetnostna gostota je zagotovo realna. Pa se skušajmo še prepričati da je to res. V splošnem lahko zapišem $A^*B=c+id$ in torej $B^*A=c-id$. To vstavimo v gornjo enačbo, prava dva člena vsote pa takoj prepoznamo kot kvadrata absolutnih vrednosti.

$$\rho(x,t)=\left|A\right|^2+\left|B\right|^2+\left(c+id\right)\left(\cos 2kx-i\sin 2kx\right)+\left(c-id\right)\left(\cos 2kx+i\sin 2kx\right)$$

Ker se imaginarni členi med seboj pokrajšajo, je

$$\rho(x,t)=\left|A\right|^2+\left|B\right|^2+2c\cos 2kx+2d\sin 2kx$$

3. gostota toka

Izhajamo iz znane enačbe: $\vec{j} = \frac{\hbar}{2m}\left[\psi^{*}\nabla\psi - \psi\nabla\psi^{*}\right]$, kar se v našem primeru prevede na

$$
\begin{aligned}
j &= \frac{\hbar}{2m}\left[\psi^{*}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x}\right] = \\
&= \frac{\hbar}{2m}\left[\left(A^{*}e^{-ikx} + B^{*}e^{ikx}\right)\left(ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx}\right) - \left(Ae^{ikx} + Be^{-ikx}\right)\left(-ikA^{*}e^{-ikx} + ikB^{*}e^{ikx}\right)\right] = \\
&= \frac{\hbar}{2m}\left(\left|A\right|^{2} + \left|B\right|^{2}\right)
\end{aligned}
$$