Operator rotacije

1 Naloga

Zapiši matriko operatorja rotacije okrog x osi za kot φ v bazi lastnih stanj operatorja $\hat{L}^2$ z lastno vrednostjo $\hbar^2 l(l+1)$, $l = 1$ in opearatorja L_z. S to rešitvijo eksplicitno pokaži, da se v sistemu s Hamiltonovim operatorjem $\hat{H} = aL_x$ stanje, ki ima ob času 0 dobro določeno komponento vrtilne količine v z smeri, po določenem času obrne v stanje z nasprotno komponento vrtilne količine.

2 Operator rotacije

Naša baza je: $l = 1$, $m = -1, 0, 1$

Operator rotacije zapišemo kot:

$$U_{\vec{\varphi}} = e^{-i\frac{\vec{\varphi}\vec{L}}{\hbar}}$$

Ker bomo vrteli okoli x osi pišemo:

$$\vec{\varphi} = (\varphi, 0, 0)$$

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$$

Torej se naš operator rotacije glasi:

$$U_{\vec{\varphi}} = e^{-i\frac{\varphi L_x}{\hbar}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-i\frac{\varphi L_x}{\hbar})$$

Kjer je:

$$L_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \hbar M$$

Ker rabimo potence matrike M izračunamo še:

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ko izračunamo še višje potence opazimo:

$$M^{(2n+1)} = M$$

$$M^{(2n)} = M^2$$

Torej lahko naš operator zapišemo kot

$$U_{\vec{\varphi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-i\varphi M)^n = I + M \sum_{n\ lih}^{\infty} \frac{1}{n!}(-i\varphi)^n + M^2 \sum_{n\ sod, n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-i\varphi)^n$$

Če zapišemo nekaj členov vsake vsote:

$$U_{\vec{\varphi}} = I - iM\varphi + iM\frac{1}{3!}\varphi^3 - \ldots - M^2\frac{1}{2!}\varphi^2 + M^2\frac{1}{4!}\varphi^4 - \ldots$$

vidimo, da je to ravno:

$$U_{\vec{\varphi}} = I - iMsin\varphi + M^2(cos\varphi - 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(cos\varphi + 1) & -\frac{i}{\sqrt{2}}sin\varphi & \frac{1}{2}(cos\varphi - 1) \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}sin\varphi & cos\varphi & -\frac{i}{\sqrt{2}}sin\varphi \\ \frac{1}{2}(cos\varphi - 1) & -\frac{i}{\sqrt{2}}sin\varphi & \frac{1}{2}(cos\varphi + 1) \end{pmatrix}$$

Oziroma, če to zapišemo s polovičnimi koti:

$$U_{\vec{\varphi}} = \begin{pmatrix} cos^2\frac{\varphi}{2} & -i\sqrt{2}sin\frac{\varphi}{2}cos\frac{\varphi}{2} & -sin^2\frac{\varphi}{2} \\ -i\sqrt{2}sin\frac{\varphi}{2}cos\frac{\varphi}{2} & 1 - 2sin^2\frac{\varphi}{2} & -i\sqrt{2}sin\frac{\varphi}{2}cos\frac{\varphi}{2} \\ -sin^2\frac{\varphi}{2} & -i\sqrt{2}sin\frac{\varphi}{2}cos\frac{\varphi}{2} & cos^2\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

Poglejmo sedaj kaj se zgodi v sistemu s Hamiltonovim operatorjem $\hat{H} = aL_x$ po določenem času:

$$U_t = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-i\frac{aL_x}{\hbar}t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-iaMt)^n =$$

$$= I - iMsin(at) + M^2(cos(at) - 1)$$

Dobili smo enak rezultat kot prej, le da sedaj namesto φ nastopa at Zapišimo to kot matriko:

$$U_t = \begin{pmatrix} cos^2\frac{at}{2} & -i\sqrt{2}sin\frac{at}{2}cos\frac{at}{2} & -sin^2\frac{at}{2} \\ -i\sqrt{2}sin\frac{at}{2}cos\frac{at}{2} & 1 - 2sin^2\frac{at}{2} & -i\sqrt{2}sin\frac{at}{2}cos\frac{at}{2} \\ -sin^2\frac{at}{2} & -i\sqrt{2}sin\frac{at}{2}cos\frac{at}{2} & cos^2\frac{at}{2} \end{pmatrix}$$

Sedaj lahko z našo matriko U_t delujemo na vrtilno količino, ki ima dobro določeno komponento v z smeri, pri čemer

$|l_z = 1>$ ustreza vektorju $(1,0,0)^T$
$|l_z = 0> \sim (0,1,0)^T$
$|l_z = -1> \sim (0,0,1)^T$

$$U_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos^2\frac{at}{2} \\ -i\sqrt{2}sin\frac{at}{2}cos\frac{at}{2} \\ -sin^2\frac{at}{2} \end{pmatrix}$$

$$U_t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin^2\frac{at}{2} \\ -i\sqrt{2}sin\frac{at}{2}cos\frac{at}{2} \\ cos^2\frac{at}{2} \end{pmatrix}$$

Vidimo, da se pri obeh komponenta obrne ravno v času, za katerega velja

$$\frac{at}{2} = \frac{\pi}{2}$$

torej

$$t = \frac{\pi}{a}$$

pri čemer dobimo še neko fazo (-1).

Za vektor $|l_z = 0> \sim (0,1,0)^T$ pa lahko izračunamo pričakovano vrednost.
Uporabimo:

$$L_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Torej:

$$< l_z >= \left(U_t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U_t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$