# Heisenbergova interakcija za $S = 3/2$

Albert Horvat

18. maj 2006

# 1 Naloga

Poišči lastne energije za operator Heisenbergove interakcije $H = -J\mathbf{S_1} \cdot \mathbf{S_2}$, kjer ima vsak od spinov kvantno število velikosti vrtilne količine $S_1 = S_2 = 3/2$. Za nekatera lastna stanja sistema izračunaj pričakovane vrednosti in nedoločenosti komponent vrtilne količine v $z$ smeri za posamezna spina.

# 2 Rešitev

## 2.1 Lastne energije

Uvedemo skupni spin $\mathbf{S} = \mathbf{S_1} + \mathbf{S_2}$. Kvadrat velikosti je $\mathbf{S^2} = \mathbf{S_1^2} + \mathbf{S_2^2} + 2\mathbf{S_1} \cdot \mathbf{S_2}$. Sedaj lahko zapišemo operator Heisenbergove interakcije kot

$$H = -\frac{J}{2}(\mathbf{S^2} - \mathbf{S_1^2} - \mathbf{S_2^2}) \tag{1}$$

Lastna stanja za operator $\mathbf{S^2}$ so $|SM\rangle$, veljajo zveze

$$\begin{aligned} |M| &\leq S \\ |S_1 - S_2| \leq\ & S \leq S_1 + S_2 \qquad (2) \\ \mathbf{S^2}|SM\rangle &= \hbar^2 S(S+1)|SM\rangle, \qquad (3) \end{aligned}$$

kjer je $S$ kvanto število velikosti skupne vrtilne količine, M pa kvanto število operatorja $S_z$. Stanja $|SM\rangle$ lahko izrazimo s lastnimi stanji operatorjev $\mathbf{S_1}$ in $\mathbf{S_2}$. Lastna stanja operatorja $\mathbf{S_1}$ zapišemo kot $|S_1 m_1\rangle$, enako naredimo tudi za $\mathbf{S_2}$. Ker je kvantno število velikosti posameznih spinov enako 3/2, izpustimo oznako $S_1$, ter stanje $|S_1 m_1\rangle$ okrajšamo v $|m_1\rangle$. Uvedemo produktna stanja $|S_1 m_1\rangle|S_2 m_2\rangle = |m_1 m_2\rangle$, ter po teh stanjih razvijemo stanja $|SM\rangle$. Koeficienti v razvoju se imenujejo Clebsch-Gordanovi koeficienti, ter so tabelirani. Sedaj vidimo, da so stanja $|SM\rangle$ lastna stanja operatorja $H$, saj velja:

$$\begin{aligned} \mathbf{S_1^2}|SM\rangle &= \mathbf{S_1^2} \sum_{m1,m2} \langle m_1 m_2|SM\rangle |m_1 m_2\rangle \\ &= \hbar^2 S_1(S_1+1) \sum_{m1,m2} \langle m_1 m_2|SM\rangle |m_1 m_2\rangle \\ &= \hbar^2 S_1(S_1+1)|SM\rangle \end{aligned}$$

in podobno za $\mathbf{S_2^2}$.

Zdaj lahko zapišemo lastne energije

$$\begin{aligned} H|SM\rangle &= E|SM\rangle \\ &= -\frac{J\hbar^2}{2}(S(S+1) - S_1(S_1+1) - S_2(S_2+1))|SM\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

Če še upoštevamo, da je $S_1 = S_2 = 3/2$ dobimo končno

$$E_S = -\frac{J\hbar^2}{2}(S(S+1) - 3\frac{5}{2}) \tag{5}$$

Vidimo, da je energija odvisna samo od kvantnega števila velikosti skupne vrtilne količine, zato energije indeksiramo po tem številu. Iz zveze (2) ugotovimo da $S$ lahko zavzame vrednosti $S = 0, 1, 2, 3$, zato dobimo za energije naslednje vrednosti:

| $S$ | $E_S$ |
|---|---|
| 0 | $\frac{J\hbar^2}{2}\frac{15}{2}$ |
| 1 | $\frac{J\hbar^2}{2}\frac{11}{2}$ |
| 2 | $\frac{J\hbar^2}{2}\frac{3}{2}$ |
| 3 | $-\frac{J\hbar^2}{2}\frac{9}{2}$ |

(6)

Kolikšna je pa degeneracija za posamezno energijo? Za velikost spina $S_1 = 3/2$ obstajajo 4 različna lastna stanja $|m_1\rangle$, zato je produktnih stanj 16, in ker smo s vpeljavo stanj $|SM\rangle$ uvedli drugo bazo, je tudi teh stanj 16. Iz tabele Clebsch-Gordanovih koeficientov (razdelek $3/2 \times 3/2$) razberemo, da je 7 stanj z $S = 3$, 5 z $S = 2$, 3 z $S = 1$, ter eno stanje z $S = 0$.

## 2.2 Pričakovane vrednosti in nedoločenosti za $S_{1z}$ in $S_{2z}$

Računali bomo le za $S_{1z}$, saj je postopek tudi za $S_{2z}$ enak. Pričakovane vrednosti in nedoločenosti računamo običajno:

$$\langle SM|S_{1z}|SM\rangle$$

$$\delta S_{1z}{}^2 = \langle SM|S_{1z}{}^2|SM\rangle - \langle SM|S_{1z}|SM\rangle.$$

Za zgled vzemimo stanje $|SM\rangle = |3,0\rangle$ Stanja bom označeval samo s potrebnimi kvantnimi števli. Stanja $|SM\rangle$ ne bomo zamešali s stanji $|m_1 m_2$, ker sta $S$ in $M$ vedno celi števili, $m_1$ in $m_2$ pa nikdar.

$$\begin{aligned} \langle 3,0|S_{1z}|3,0\rangle = &\left(\sqrt{\frac{1}{20}}\left\langle\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right| + \sqrt{\frac{9}{20}}\left\langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right| + \sqrt{\frac{9}{20}}\left\langle-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right| + \sqrt{\frac{1}{20}}\left\langle-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right|\right) \\ &|S_{1z}| \\ &\left(\sqrt{\frac{1}{20}}\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{9}{20}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{9}{20}}\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{20}}\left|-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle\right) \end{aligned}$$

Vemo, da je $S_{1z}|m_1 m_2\rangle = \hbar m_1|m_1 m_2\rangle$, ter da je $\langle ij|kl\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}$, kjer pomenijo $i, k$ kvantno število $m_1$, ter $j, l$ kvantno število $m_2$. Vidimo da ne rabimo prepisovati vse člene v skalarnem produktu, ker mešani členi odpadejo. Ostane

$$\langle 3,0|S_{1z}|3,0\rangle = \frac{1}{20}\left\langle\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right| S_{1z} \left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle +$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{9}{20}\left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right| S_{1z} \left| \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \\
& \frac{9}{20}\left\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right| S_{1z} \left| -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \\
& \frac{1}{20}\left\langle -\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right| S_{1z} \left| -\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle \\
= & \hbar\left(\frac{1}{20}\frac{3}{2}+\frac{9}{20}\frac{1}{2}-\frac{9}{20}\frac{1}{2}-\frac{1}{20}\frac{3}{2}\right) \\
= & 0
\end{aligned}
$$

Za nedoločenost rabimo še $\langle 3,0|S_{1z}^2|3,0\rangle$. Če pogledamo prejšnji račun, ter zamenjamo $S_{1z}$ s $S_{1z}^2$ vidimo, da spet ostanejo enaki členi, koeficienti so spet isti, samo ko še enkrat delujemo z operatorjem komponente spina dobimo naslednji rezultat:

$$
\langle 3,0|S_{1z}^2|3,0\rangle = \hbar^2\left(\frac{1}{20}\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{20}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{20}\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right) \tag{7}
$$

To pa je enako tudi kvadratu nedoločenosti komponenete spina v $z$ smeri. Po tem zgledu izračunamo še vse ostale pričakovane vrednosti in nedoločenosti.