1. KOLOKVIJ IZ KVANTNE MEHANIKE I

Ljubljana, 20. april 2005

1. Stanje elektrona na obroču[1] s polmerom R lahko opišemo z enodimenzionalno Schrödingerjevo enačbo, kjer je koordinata q ločna dolžina na obroču ($q \in [-\pi R, \pi R)$) in je sistem periodičen. Nečistoča je majhna v primerjavi z valovnimi dolžinami delca, zato jo lahko opišemo kar s potencialom oblike $V(q) = V_0 R\ \delta(q)$, kjer je V_0 pozitivna konstanta.

    - Stacionarno Schrödingerjevo enačbo z vpeljavo kotne spremenljivke $\varphi = q/R$ prepišite v brezdimenzijsko obliko in poiščite brezdimenzijski parameter motnje. Ali ima sistem kakšno simetrijo?
    - Poiščite lastne energije sistema oziroma enačbo, ki določa lastne energije sistema za tiste energije, ki jih ni mogoče izračunati eksplicitno.
    - Poiščite energijski spekter v primeru zelo velikega oziroma zelo majhnega brezdimenzijskega parametra motnje.
    - Iz enačbe, ki določa lastne energije sistema, ocenite razmik med skoraj degeneriranimi stanji sistema za zelo majhen brezdimenzijski parameter motnje.

2. Nihanje jeder dvoatomne molekule opišemo z enodimenzionalnim harmonskim potencialom s frekvenco ω_1 in reducirano maso M. Če molekula izgubi elektron, ostane potencial še vedno harmonski, a s spremenjeno frekvenco $\omega_2 = \gamma^2 \omega_1$ in s premaknjenim minimumom harmonskega potenciala za $\Delta x = \delta \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_1 M}}$, kjer sta δ in γ brezdimenzijska parametra.

    - Zapišite operatorja koordinate in gibalne količine s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji ($a_1^\dagger, a_1$) originalnega (prvega) sistema ter nato še s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji ($a_2^\dagger, a_2$) premaknjenega in "stisnjenega" (drugega) sistema.
    - Izrazite operatorja $a_2^\dagger$ in a_2 z operatorjema $a_1^\dagger$ in a_1.
    - Izrazite številski operator $n_2 = a_2^\dagger a_2$ drugega sistema s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji prvega sistema.
    - Izračunajte pričakovano vrednost številskega operatorja drugega sistema po izgubi elektrona, če se molekula pred izgubo elektrona nahaja v osnovnem nihajnem stanju.
    - *Neobvezno: Poiščite diferenčno enačbo, s katero lahko določimo koeficiente razvoja lastnih stanj drugega sistema po lastnih stanjih prvega sistema. Namig: lastna stanja drugega sistema so lastna stanja ustreznega številskega operatorja z znano lastno vrednostjo.*

---

[1] Profesor Takuma Hirohashi je pred kratkim objavil članek (T. Hirohashi, Quantum Computing Reports **42**, 747 (2004)), v katerem je študiral vpliv motnje na stanje kvantnega bita. Kvantna informacija je v njegovem članku podana s stanjem delca na mezoskopskem tankem obroču s polmerom R, ki lahko kroži v eno (stanje kvantnega bita "0") ali v drugo smer (stanje bita "1"). Primer motnje je nečistoča na takšnem obroču.