Sipanje na potencialu dveh δ-funkcij

Jure Oder

V tej nalogi iščemo prepustnost potenciala dveh δ-funkcij

$$V(x) = \lambda \left[\delta \left(x + \frac{a}{2} \right) + \delta \left(x - \frac{a}{2} \right) \right],$$

za primer ko je $\frac{ma|\lambda|}{\hbar^2} \gg 1$ (ko sta δ-funkciji zelo "globoki"). δ-funkciji sta obrnjeni navzdol, zato je koeficient $\lambda < 0$. Da lahko sploh govorimo o sipanju na takem potencialu, moramo imeti vpadno valovanje, kar pomeni valovno funkcijo z realnim k-jem. Pri eni od prejšnjih nalog[1] smo izpeljali, kako je prepusnost za valovne funkcije odvisna od k-jev:

$$t(k) = \frac{k^2}{(k + ik_0)^2 + k_0^2 e^{2ika}}, \tag{1}$$

kjer je $k_0 = \frac{m\lambda}{\hbar^2}$.

Zaradi preglednosti vpeljimo oznaki:

$$ak = x; \qquad ak_0 = x_0 \tag{2}$$

Enačbo (1) tako prepišemo v

$$t(x) = \frac{x^2}{(x + ix_0)^2 + x_0^2 e^{2ix}} \tag{3}$$

Zanimajo nas predvsem prepustnosti blizu v vrhovih resonanc torej v okolici 1. Te iscemo pri najmanjsih vrednostih imenovalca. V prejšnji nalogi[2] smo izračunali prvi popravek za vrhove prepustnosti:

$$x = n\pi \left(1 - \frac{1}{x_0} \right).$$

Ta popravek pa še ni dovolj, saj dobimo da je $t(x) > 1$, kar pa je nefizikalno. Zato poiščemo še višji red. Tudi tu nastavimo rešitev kot

$$x = n\pi \left(1 - \frac{1}{x_0} \right) + \varepsilon,$$

vendar vztrajamo, da je ε realen. Ko razvijemo imenovalec enačbe (3) dobimo:

$$(n\pi)^2 \left(1 - \frac{1}{x_0} \right)^2 + 2n\pi \left(1 - \frac{1}{x_0} \right) \varepsilon + 2in\pi \left(1 - \frac{1}{x_0} \right) x_0 +$$
$$+ 2ix_0\varepsilon - x_0^2 + x_0^2 \left[1 + 2i \left(\varepsilon - \frac{n\pi}{x_0} \right) - 2 \left(\varepsilon - \frac{n\pi}{x_0} \right)^2 \right] = 0.$$

[1] Glej 17.3.2004, Sipanje v 1D II, Boštjan Maček
[2] Glej 24.3.2004, Kvazivezana stanja I, Rok Dolenc

V izrazu najprej odštejemo, nato pa po podobnem razmisleku kot v prejšnji nalogi upoštevamo le člene reda 1, kjer pa je ε reda $\frac{1}{x_0^2}$. Tako nam ostane rezultat:

$$-(n\pi)^2 - 2in\pi + 2ix_0^2\varepsilon = 0.$$

Ker smo zahtevali, da je ε realen, tako ne moremo odšteti realnega člena v zgornji enačbi. Zato nastavimo ε tako, da se odšteje imaginarni del:

$$\varepsilon = \frac{n\pi}{x_0^2}.$$

Ker raziskujemo okolico resonanc, prištejemo rešitvi majhen člen $\tilde{\varepsilon}$:

$$x = n\pi\left(1 - \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}\right) + \tilde{\varepsilon}.$$

Ko razvijemo imenovalec s takim popravkom, dobimo:

$$-(n\pi)^2 + 2ix_0^2\tilde{\varepsilon}.$$

Za števec pa lahko vzamemo kar $(n\pi)^2$. Izraz za prepustnost preide v

$$t(\tilde{\varepsilon}) = \frac{1}{\frac{2ix_0^2\tilde{\varepsilon}}{(n\pi)^2} - 1}. \tag{4}$$

Radi bi dobili odvisnost prepustnosti od energije, zato razvijemo energijo po novih k-jih:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}x^2,$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\left[(n\pi)^2\left(1 - \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}\right)^2 + 2n\pi\tilde{\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}\right)\right].$$

Tu smo že zanemarili kvadratni člen v $\tilde{\varepsilon}$. Uvedemo novo oznako

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2ma^2}(n\pi)^2\left(1 - \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}\right)^2$$

in izrazimo $\tilde{\varepsilon}$ ter dobimo:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{ma^2}{n\pi\hbar^2}(E - E_n).$$

To vstavimo nazaj v enačbo (4) in ko uvedemo še oznako

$$\Gamma_n = \frac{n^3\pi^3\hbar^2}{ma^2x_0^2},$$

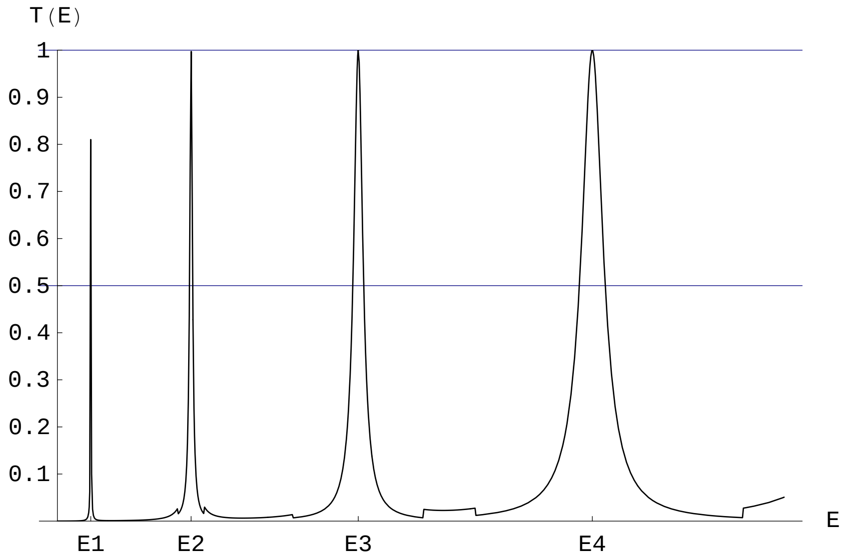
dobimo

$$t(E) = \frac{\frac{\Gamma_n}{2i}}{(E - E_n) - \frac{\Gamma_n}{2i}}.$$

Nas v resnici ne zanima prepustnost za valovne funkcije, temveč kvadrat le te, zato izračunamo

$$T(E) = |t(e)|^2 = \frac{\frac{\Gamma_n^2}{4}}{(E - E_n)^2 + \frac{\Gamma_n^2}{4}}.$$

Enacba v tej obliki se imenuje Lorentzova funkcija.



Slika 1: Prikaz tansmisivnosti v odvisnosti od energije. Širina n-tega resonančnega vrha znaša pri $T = 0.5$; Γ_n. Vrhovi resonanc se razmikajo, ker energije E_n rastejo s kvadratom in razširjajo, ker raste Γ_n s tretjo potenco.