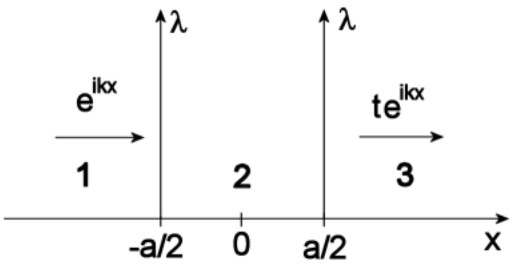
Kvazivezana stanja I

Rok Dolenec

2. april 2004

V prejšnji nalogi smo za potencial oblike:



$$V(x) = \lambda(\delta(x - \tfrac{a}{2}) + \delta(x + \tfrac{a}{2}))$$

izračunali prepustnost:

$$t = \frac{k^2}{(k+ik_0)^2 + k_0^2 e^{2ika}}$$

Vezana stanja za tak potencial poiščemo tako, da poiščemo pole prepustnosti:

$$(k + ik_0)^2 + k_0^2 e^{2ika} = 0$$

Najprej poiščemo rešitve za $\lambda < 0$ pri predpostavki da je $\mid k_0 \mid a \gg 1$. k se zato ne bo veliko razlikoval od $i \mid k_0 \mid$:

$$k = i \mid k_0 \mid + \varepsilon$$

S tem nastavkom gremo v enačbo za pole:

$$(i \mid k_0 \mid + \varepsilon - i \mid k_0 \mid)^2 = -k_0^2 e^{2ika}$$

$$\varepsilon^2 = -k_0^2 e^{2i(i|k_0|+\varepsilon)a} = -k_0^2 e^{-2|k_0|a} e^{2ia\varepsilon}$$

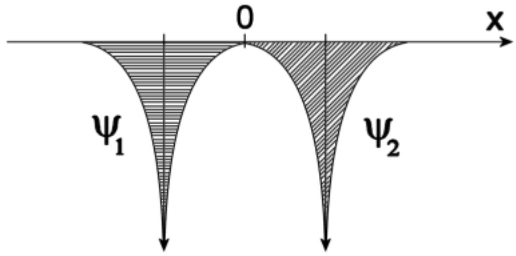
Zadnji eksponent lahko zanemarimo, saj je ε le majhen popravek, in tako dobimo:

$$\varepsilon = \pm i \mid k_0 \mid e^{-|k_0|a}$$

$$k = i \mid k_0 \mid (1 \pm e^{-|k_0|a})$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = -\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}(1 \pm e^{-|k_0|a})^2 \simeq -\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}(1 \pm 2e^{-|k_0|a})$$

Imamo torej dve vezani stanji, približne oblike:



iz katerih lahko sestavimo sodo ali liho rešitev:

$$\psi_S = a\psi_1 + a\psi_2$$

$$\psi_L = b\psi_1 - b\psi_2$$

Rešitev bi lahko poiskali tudi z nastavkom:

$$\psi_{1.obmocje} = Ae^{kx}, \psi_{2.obmocje} = B\cosh kx, \psi_{3.obmocje} = Ae^{-kx}$$

za sodo funkcijo, za liho bi $\psi_{2.obmocje}$ zamenjali z $B\sinh kx$.
Poglejmo še primer ko je $\mid k_0 \mid a \gg 1$ in $k \ll 1$. Pole v tem primeru poiščemo z nastavkom:

$$ka = n\pi + \varepsilon$$

Vpeljemo še novi spremenljivki:

$$x = ka \text{ in } x_0 = k_0 a$$

Končno poiščimo pole:

$$(x + ix_0)^2 + x_0^2 e^{2ix} = 0$$

$$(n\pi + \varepsilon + ix_0)^2 + x_0^2 e^{2i(n\pi+\varepsilon)} = 0$$

upoštevamo, da je $e^{2in\pi} = 1$,

$$(n\pi + \varepsilon)^2 + 2ix_0(n\pi + \varepsilon) - x_0^2 + x_0^2 e^{2i\varepsilon} = 0$$

$$(n\pi + \varepsilon)^2 + 2ix_0(n\pi + \varepsilon) - x_0^2 + x_0^2(1 + 2i\varepsilon + \cdots) = 0$$

V zadnjem koraku smo razvili eksponent. Sedaj upoštevamo le člene reda velikosti x_0, vemo pa, da je ε reda $\frac{1}{x_0}$:

$$2in\pi x_0 + 2i\varepsilon x_0^2 = 0$$

$$\varepsilon = -\frac{n\pi}{x_0}$$

Dobili smo:

$$k = \frac{n\pi}{a}(1 - \frac{1}{x_0})$$

Tak k je realno število, zato ustreza valovanju, ne pa vezanemu stanju. Rezultat tudi ni fizikalno smiselen, ker je zanj $t > 1$. Zato poskusimo razvoj nadaljevati še za en člen:

$$ka = n\pi(1 - \frac{1}{x_0}) + \varepsilon$$

kar spet nesemo v enačbo za pole:

$$(n\pi(1 - \frac{1}{x_0}) + \varepsilon + ix_0)^2 + x_0^2 e^{2in\pi - i\frac{2n\pi}{x_0} + 2i\varepsilon} = 0$$

Zopet upoštevamo, da je $e^{2in\pi} = 1$ in razvijemo eksponent:

$$(n\pi(1 - \frac{1}{x_0}) + \varepsilon)^2 + 2i(n\pi(1 - \frac{1}{x_0}) + \varepsilon)x_0 - x_0(1 - (i\frac{2n\pi}{x_0} - 2i\varepsilon) + \cdots) = 0$$

Sedaj upoštevamo člene reda 1 ter da je ε reda $\frac{1}{x_0^2}$:

$$n^2\pi^2 - 2in\pi + 2i\varepsilon x_0^2 - 2n^2\pi^2 = 0$$

$$\varepsilon = \frac{n\pi(n\pi + 2i)}{2ix_0^2}$$

$$k = \frac{n\pi}{a}(1 - \frac{1}{x_0}) + \frac{n\pi(n\pi + 2i)}{2ix_0^2 a}$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}((\frac{n\pi}{a})^2(1 - \frac{1}{x_0})^2 + \frac{2i(n\pi)^2(n\pi + 2i)(1 - \frac{1}{x_0})}{-2x_0^2 a^2} + \cdots)$$

$$E = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}(1 - \frac{2}{x_0} + \frac{3}{x_0^2} - \frac{in\pi}{x_0^2})$$

Vpeljemo nove oznake:

$$E = E_n - i\frac{\Gamma_n}{2}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}(1 - \frac{2}{x_0} + \frac{3}{x_0^2}) \text{ in } \Gamma_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}\frac{2n\pi}{x_0^2}$$

Sedaj lahko zapišemo valovno funkcijo:

$$\psi(x,t) = \psi(x,0)e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = \psi(x,0)e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}e^{-\frac{\Gamma_n}{2\hbar}t}$$

$$\mid \psi(x,t) \mid^2 = \mid \psi(x,0) \mid^2 e^{-\frac{\Gamma_n}{\hbar}t}$$

To je valovna funkcija delca, ki je ujet v potencialni jami, ampak lahko uide ven: kvazivezana stanja.